Digitale Systeme WS 01/02

Aufgabenzettel und Musterlösungen

„...möchten ***Sie*** *vielleicht die Vorlesung halten?“*

www.kuertz.net/uni   klaasole@kuertz.net

Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 24.10.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 1

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Konstruieren Sie je ein Netz von T- und F-Switches, so wie in der Vorlesung eingeführt, das die logische Implikation ($U \Rightarrow V$) bzw. die logische Äquivalenz ($U \Leftrightarrow V$) gemäß der folgenden Wertetabelle realisiert.

U	V	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ergänzen Sie das in der Vorlesung vorgestellte sequentielle Schaltwerk zur Steuerung einer Ampelanlage um die Komponenten, die auch die Steuerung der Ost-West-Richtung realisieren.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Fügen Sie zu dem Schaltwerk aus Aufgabe 2 eine Steuerung für Fußgängerampeln in beide Richtungen hinzu, die nur die Farben rot und grün kennt. Die grün-Phase einer Fußgängerampel beginnt mit der grün-Phase der zugeordneten Hauptampel, endet jedoch 5 Sekunden vor deren Ende. Ansonsten ist die Ampel auf rot geschaltet.

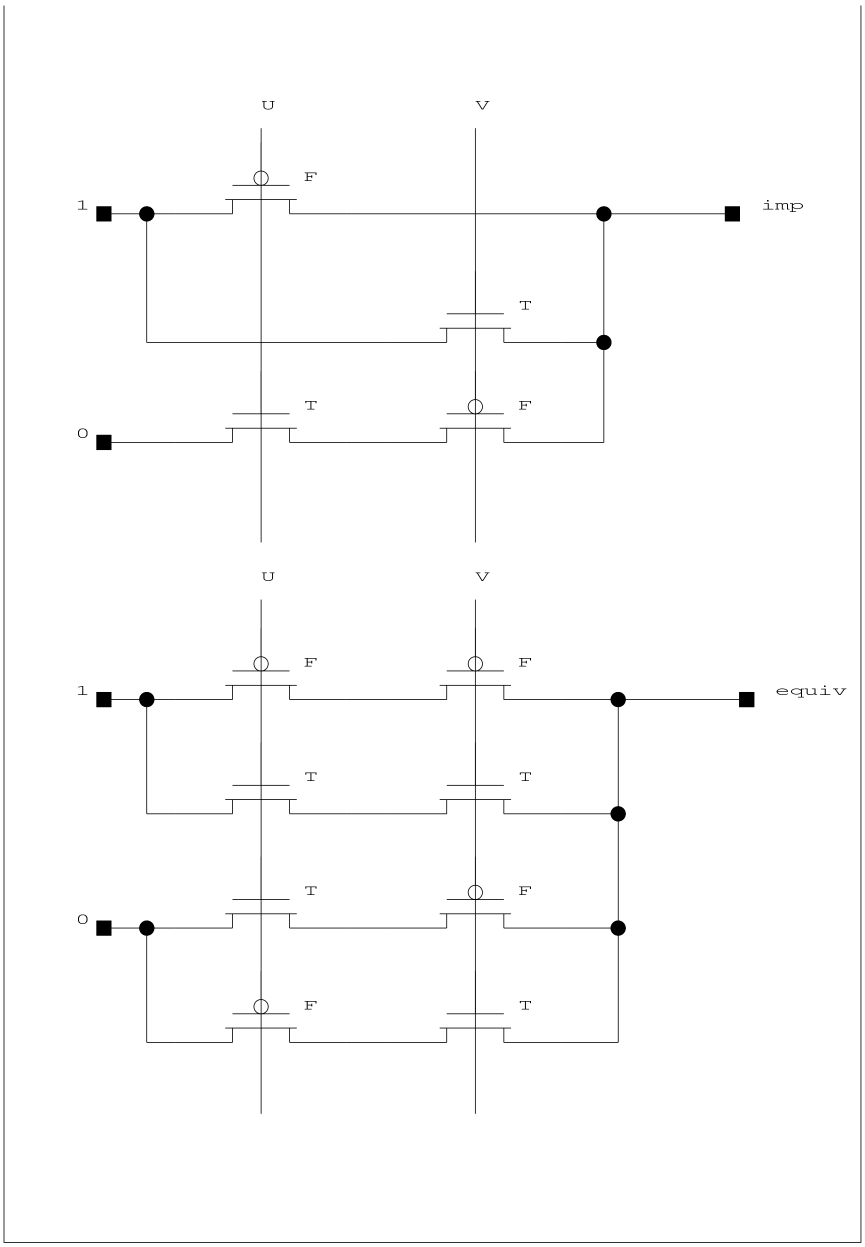
Abgabe: Bis Mi., 7.11.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002

Serie 1 — Musterlösung

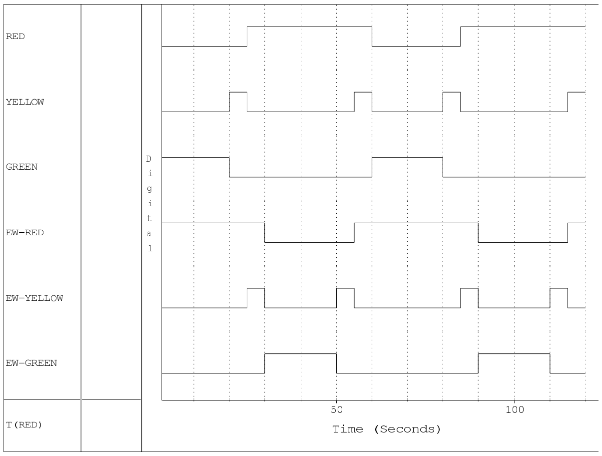
Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die nachfolgenden T-F-Switch Schaltnetze realisieren sowohl die Implikation (oberes Schaltnetz) als auch die Äquivalenz (unteres Schaltnetz). **U** und **V** bezeichnen jeweils die Eingänge, **imp** und **equiv** die Ausgänge der beiden Schaltnetze. Die Darstellung der einzelnen Switch-Bausteine weicht zwar etwas von der in der Vorlesung vorgestellten Schalterdarstellung ab, die Annotation mit **F** bzw. **T** sollte jedoch Ihre Bedeutung klären.



Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Signalverläufe an den Ampeln sind folgendermaßen einzustellen:

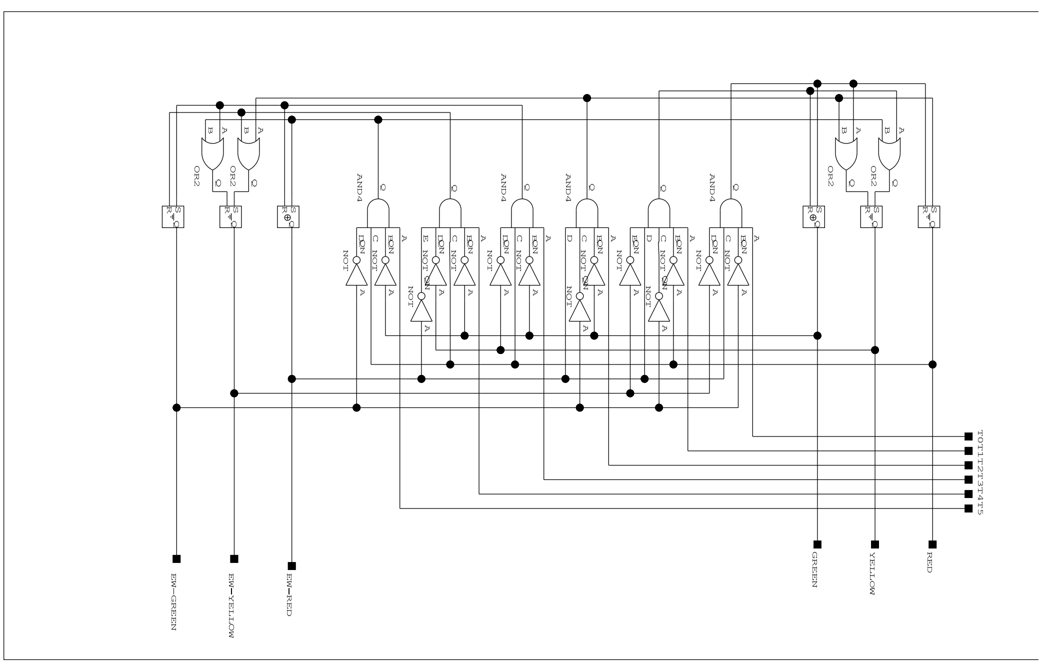


`RED`, `YELLOW`, und `GREEN` bezeichnen dabei die entsprechendfarbigen Lichter in Nord-Süd-Richtung und `EW-RED`, `EW-YELLOW`, sowie `EW-GREEN` die Lichter in Ost-West-Richtung. Zur Erzeugung dieser Signalverläufe werden die in den Übungen (siehe auch die Web-Page zur Vorlesung) vorgestellten Taktimpulse `T0, ..., T5` genutzt.

Um eine möglichst weitgehende Robustheit zu erzielen, werden alle während eines Taktimpulses stabilen Signale als Nebenbedingungen für die jeweiligen Signalwechsel (wie auch schon in den Übungen für die Nord-Süd-Richtung vorgeführt) einbezogen. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen zum Setzen bzw. Rücksetzen der einzelnen Signale für die Ost-West-Richtung:

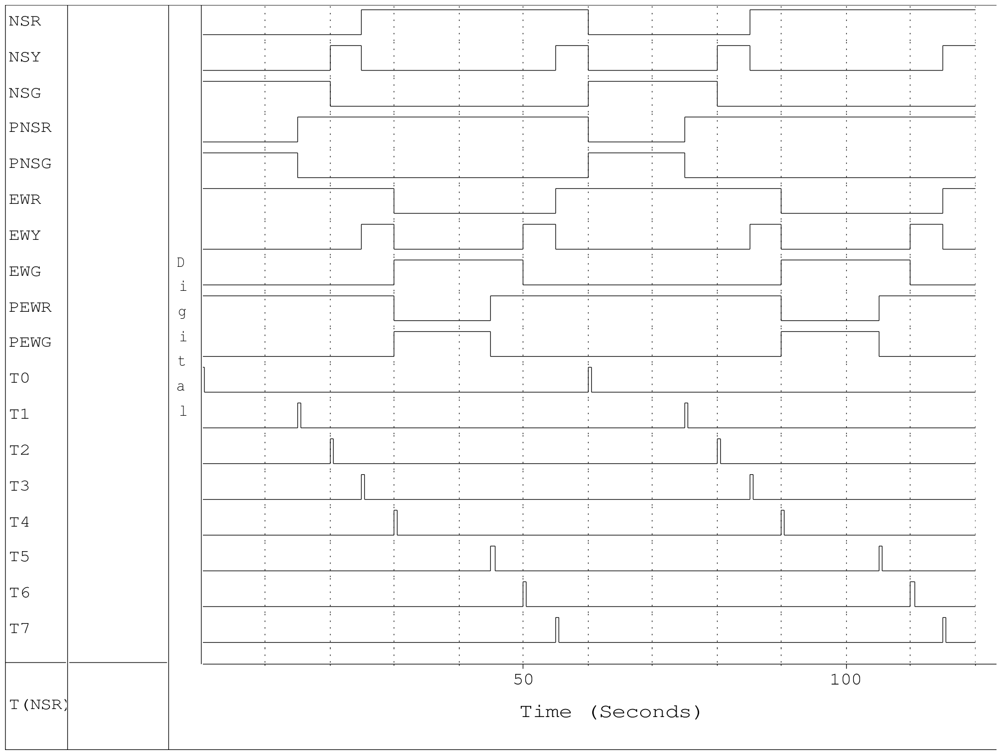
```
sEW-RED     = T5 ∧ RED ∧ ¬GREEN ∧ ¬EW-GREEN
rEW-RED     = T3 ∧ RED ∧ ¬YELLOW ∧ ¬GREEN
sEW-YELLOW  = (T2 ∧ ¬GREEN ∧ EW-RED ∧ ¬EW-GREEN)
              ∨ (T4 ∧ RED ∧ ¬YELLOW ∧ ¬GREEN ∧ ¬EW-RED)
rEW-YELLOW  = (T3 ∧ RED ∧ ¬YELLOW ∧ ¬GREEN) ∨ (T5 ∧ RED ∧ ¬GREEN ∧ ¬EW-GREEN)
sEW-GREEN   = T3 ∧ RED ∧ ¬YELLOW ∧ ¬GREEN
rEW-GREEN   = T4 ∧ RED ∧ ¬YELLOW ∧ ¬GREEN ∧ ¬EW-RED
```

und somit folgende Schaltung:



Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Signalverläufe für die Fußgängerampeln fügen sich folgendermaßen ein:



Dabei bezeichnen `NSR`, `NSY` und `NSG` die Lichter der Ampeln in Nord-Süd-Richtung, sowie `EWR`, `EWY` und `EWG` die Lichter der Ampeln in Ost-West-Richtung. Ein vorangestelltes `P` markiert die entsprechenden Fußgängersignale. Um ein Umschalten der Fußgängerampeln vor dem Umschalten der zugehörigen Hauptampeln zu ermöglichen, werden zwei weitere Taktsignale nach 15 bzw. 45 Sekunden benötigt.

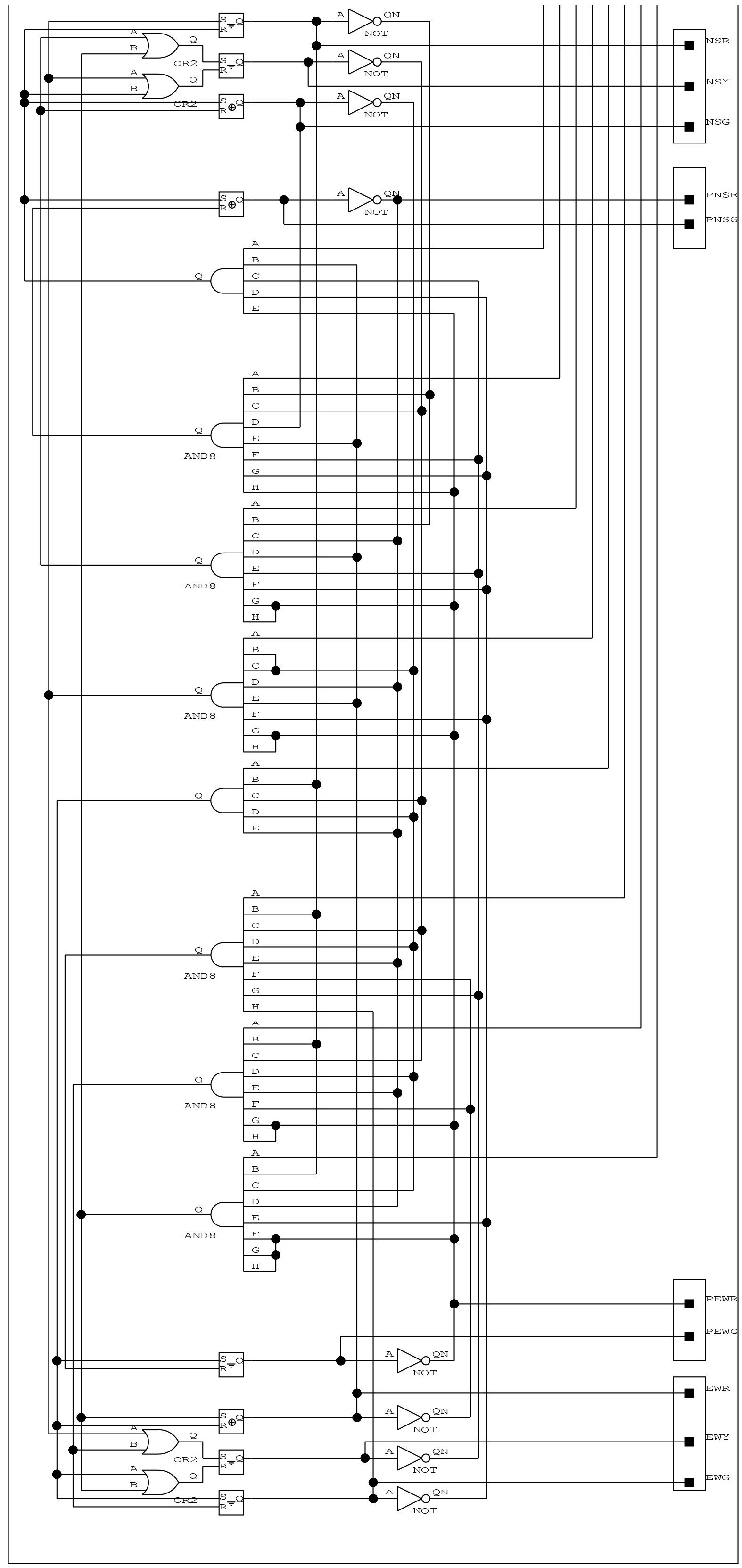
Für die Konstruktion der Schaltung ist folgendes zu beachten:

- Aus den zusätzlichen Signalen für die Fußgängerampeln ergeben sich weitere Nebenbedingungen für das Setzen bzw. Rücksetzen der einzelnen Signale.
- Da die Signale `PNSR` und `PNSG` bzw. `PEWR` und `PEWG` invers zueinander sind, können sie durch je einen Speicherbaustein dargestellt werden.

Die Schaltbedingungen für die Fußgängersignale ergeben sich aus:

```
sPNSG  = T0 ∧ EWR ∧ ¬EWY ∧ ¬EWG ∧ ¬PEWG
rPNSG  = T1 ∧ ¬NSR ∧ ¬NSY ∧ NSG ∧ EWR ∧ ¬EWY ∧ ¬EWG ∧ ¬PEWG
sPEWG  = T4 ∧ NSR ∧ ¬NSY ∧ ¬NSG ∧ ¬PNSG
rPEWG  = T5 ∧ NSR ∧ ¬NSY ∧ ¬NSG ∧ ¬PNSG ∧ ¬EWR ∧ ¬EWY ∧ EWG
```

Damit erhalten wir als Schaltung:



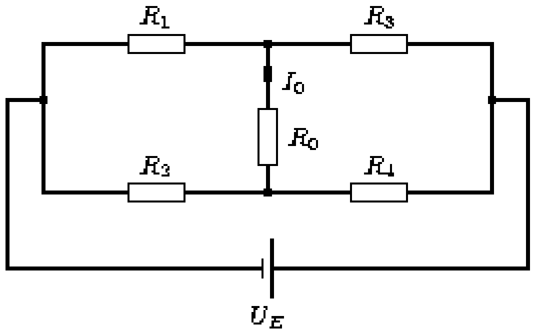
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 31.10.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 2

Aufgabe 4 (10 Punkte)

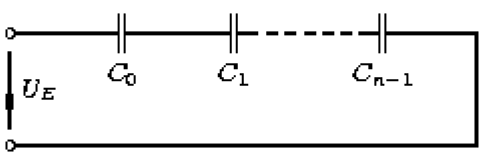
Berechnen Sie in dem nachfolgenden Widerstandsnetzwerk den Strom I_0 durch den Widerstand R_0 in Abhängigkeit von der Versorgungsspannung U_E und den Widerständen R_1, R_2, R_3, R_4.



Geben Sie die Widerstandsverhältnisse an, unter denen der Strom I_0 den Wert 0 A annimmt.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei eine Serienschaltung von n Kapazitäten C_i (mit $i \in \{0, ..., n-1\}$) an der die Spannung U_E anliegt.

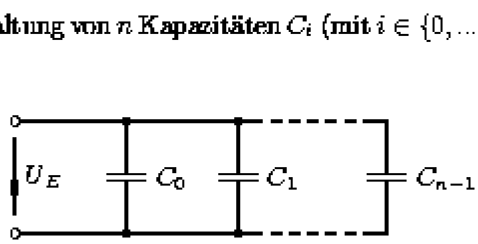


Wie berechnet sich die Gesamtkapazität der Serienschaltung?

Hinweis: Über jeder der Kapazitäten C_i fällt die Spannung U_i ab, und alle Kapazitäten halten die gleiche Ladung q.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben sei eine Parallelschaltung von n Kapazitäten C_i (mit $i \in \{0, ..., n-1\}$) an der die Spannung U_E anliegt.

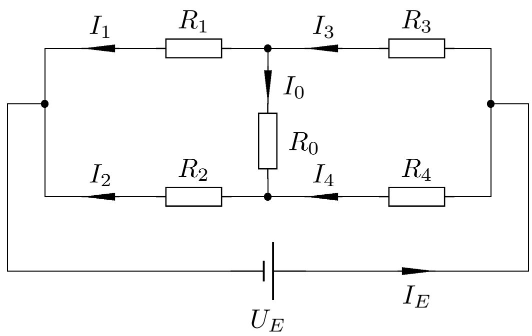


Wie groß ist die Gesamtkapazität der Anordnung?

Abgabe: Bis Mi., 14.11.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 2 — Musterlösung

Aufgabe 4 (10 Punkte)



Die Maschenregel liefert für die umlaufende, die linke obere und die rechte obere Masche:

$$R_1I_1 + R_3I_3 = U_E \tag{1}$$

$$R_0I_0 - R_1I_1 + R_2I_2 = 0 \tag{2}$$

$$R_0I_0 + R_3I_3 - R_4I_4 = 0 \tag{3}$$

Die Knotenregel liefert für die Knoten ober- und unterhalb von R_0:

$$-I_0 - I_1 + I_3 = 0 \tag{4}$$

$$I_0 + I_4 - I_2 = 0 \tag{5}$$

Die Gleichungen (1)–(5) bilden ein LGS über I_0, ..., I_4. Da wir fünf (hoffentlich unabhängige) Gleichungen für fünf Unbekannte haben, ist die Lösung des LGS eindeutig. Umformen des LGS nach I_0 ergibt:

	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0		
1:	1	0	-1	0	1	0	=(5)
2:	$-R_4$	R_3	0	0	R_0	0	=(3)
3:	0	1	0	-1	-1	0	=(4)
4:	0	R_3	0	R_1	0	U_E	=(1)
5:	0	0	R_2	$-R_1$	R_0	0	=(2)
6:	0	R_3	$-R_4$	0	$R_0 + R_4$	0	$=R_4\cdot 1+2$
7:	0	0	$-R_4$	$-R_1$	$R_0 + R_4$	$-U_E$	$=6-4$
8:	0	0	0	$R_1 + R_3$	R_3	U_E	$=4-R_3\cdot 3$
9:	0	0	0	$-(R_1R_2 + R_1R_4)$	$R_0R_4 + R_0R_2 + R_2R_4$	$-R_2U_E$	$=R_4\cdot 5+R_2\cdot 7$

Der letzte Umformungsschritt $(R_1R_2 + R_1R_4)\cdot 8 + (R_1 + R_3)\cdot 9$ liefert die Lösung:

$$I_0 = U_E \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_0R_1R_2 + R_0R_1R_4 + R_0R_2R_3 + R_0R_3R_4 + R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}$$

Das gesuchte Widerstandsverhältnis für $I_0 = 0$ ist also:

$$R_1R_4 = R_2R_3 \quad .$$

Dies läßt sich auch direkt aus (2)–(5) ablesen.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gesucht ist die Gesamtkapazität C_E. Es gilt:

$$U_E = \sum_{i=0}^{n-1} U_i \tag{6}$$

$$q_E = q = q_i \tag{7}$$

$$C_i = \frac{q_i}{U_i} \tag{8}$$

$$C_E = \frac{q_E}{U_E} \tag{9}$$

Einsetzen von (7) in (8) und (9) liefert:

$$C_i = \frac{q}{U_i} \tag{10}$$

$$C_E = \frac{q}{U_E} \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) und (11) lassen sich umformen zu:

$$U_i = \frac{q}{C_i} \tag{12}$$

$$U_E = \frac{q}{C_E} \tag{13}$$

Einsetzen von (12) in (6) ergibt:

$$U_E = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q}{C_i} \tag{14}$$

Gleichsetzen von (13) und (14) liefert:

$$\frac{q}{C_E} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q}{C_i} = q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{C_i} \tag{15}$$

Teilen beider Seiten von (15) durch q liefert das Ergebnis:

$$\frac{1}{C_E} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{C_i}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gesucht ist die Gesamtkapazität C_E. Es gilt:

$$U_E = U_i$$

$$q_E = \sum_{i=0}^{n-1} q_i$$

Also:

$$q_i = U_i C_i = U_E C_i$$

$$C_E = \frac{q_E}{U_E} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} q_i}{U_E} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} U_E C_i}{U_E} = \frac{U_E \sum_{i=0}^{n-1} C_i}{U_E} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i$$

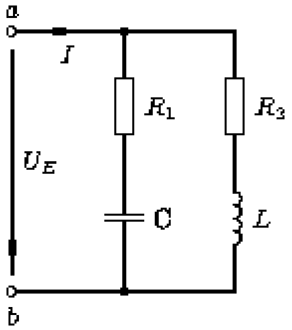
INSTITUT FÜR INFORMATIK
UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT KIEL

KIEL, 7.11.2001

ÜBUNGEN ZU DIGITALE SYSTEME
WS 2001/2002
SERIE 3

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende passive Schaltnetz:

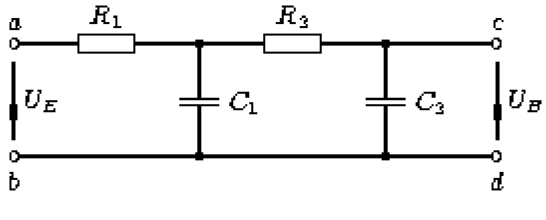


Die Spannung über den Klemmen a und b sei $U_E = U_0 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$.

Berechnen Sie in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω den komplexen Widerstand Z zwischen a und b, sowie die durch das Schaltnetz bewirkte Phasenverschiebung φ zwischen U_E und dem von a nach b fließenden Strom $I = I_0 \cdot e^{j\omega t}$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Gegeben sei das Schaltnetz:



das zwischen den Klemmen a und b mit der Spannung $U_E = U_0 \cdot e^{j\omega t}$ beaufschlagt wird. Wie berechnet sich die Spannung U_B an den Klemmen c und d in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω?

Abgabe: Bis Mi., 21.11.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 3 — Musterlösung

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Es gilt für die komplexen Widerstände durch den linken (Z_1) bzw. rechten (Z_2) Zweig des Schaltnetzes:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= R_1 + \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_1 j\omega C + 1}{j\omega C} \\
Z_2 &= R_2 + j\omega L
\end{aligned}
$$

Damit folgt für Z als Parallelschaltung von Z_1 und Z_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{j\omega C}{j\omega R_1 C + 1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = \frac{j\omega C(R_2 + j\omega L) + j\omega R_1 C + 1}{(1 + j\omega R_1 C)(R_2 + j\omega L)} \\
&= \frac{(1 - \omega^2 CL) + j\omega C(R_1 + R_2)}{(R_2 - \omega^2 R_1 CL) + j\omega(L + R_1 R_2 C)}
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung der Phasenverschiebung φ wird der Real- und Imaginärteil von Z benötigt. Daher muß Z noch auf die Normalform $\Re(Z)+j\Im(Z)$ gebracht werden, indem der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert wird. Dazu seien einige Abkürzungen eingeführt:

$$
\begin{aligned}
c &:= R_2 - \omega^2 R_1 CL \\
d &:= \omega(L + R_1 R_2 C) \\
e &:= 1 - \omega^2 CL \\
f &:= \omega C(R_1 + R_2)
\end{aligned}
$$

Dann ergibt sich für den komplexen Widerstand die Normalform:

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{c + jd}{e + jf} = \frac{c + jd}{e + jf} \cdot \frac{e - jf}{e - jf} = \frac{(ce + df) + j(de - cf)}{e^2 + f^2} \\
&= \frac{\left(\frac{R_2}{\omega^2 C^2} + \omega^2 R_1 L^2 + R_1 R_2 (R_1 + R_2)\right) + j\left(\frac{L}{\omega C^2} - \frac{R_2^2}{\omega C} - \frac{\omega L^2}{C} + \omega R_1^2 L\right)}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

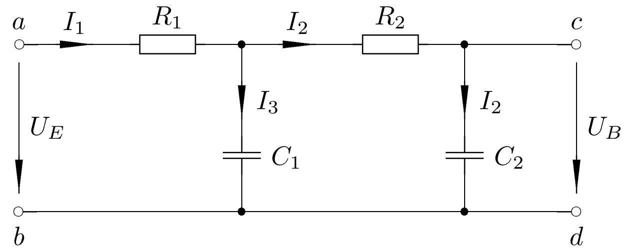
Die Phasenverschiebung φ läßt sich aus (1) ableiten. Es gilt nämlich:

$$
Z = \frac{U_E}{I} = \frac{U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{I_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{j\varphi} = |Z| \cdot e^{j\varphi} \quad .
$$

Also entspricht die Phasenverschiebung φ dem Winkel der komplexen Zahl Z:

$$
\varphi = \operatorname{arc}(Z) \quad \text{, d.h.} \quad \tan\varphi = \frac{\Im(Z)}{\Re(Z)} = \frac{de - cf}{ce + df} \quad .
$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)



Vorweg seien einige Abkürzungen definiert:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{j\omega C_1} \\
Z_2 &= \frac{1}{j\omega C_2}
\end{aligned}
$$

Die Maschenregel liefert für die linke und rechte Masche:

$$R_1 I_1 + Z_1 I_3 = U_E \tag{2}$$

$$(R_2 + Z_2) I_2 - Z_1 I_3 = 0 \tag{3}$$

Die Knotenregel liefert:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{4}$$

Die Gleichungen (2)–(4) bilden ein LGS über I_1, I_2, I_3, das nach dem gesuchten Strom I_2 zu lösen ist:

	I_3	I_1	I_2		
1:	-1	1	-1	0	=(4)
2:	Z_1	R_1	0	U_E	=(2)
3:	$-Z_1$	0	$R_2 + Z_2$	0	=(3)
4:	0	R_1	$R_2 + Z_2$	U_E	=*2*+*3*
5:	0	$Z_1 + R_1$	$-Z_1$	U_E	$=Z_1 \cdot 1 + 2$

Der letzte Umformungsschritt $(Z_1 + R_1) \cdot 4 - R_1 \cdot 5$ liefert die Lösung:

$$((Z_1 + R_1)(R_2 + Z_2) + (R_1 Z_1)) I_2 = (Z_1 + R_1 - R_1) U_E$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
U_B = Z_2 I_2 &= \frac{Z_1 Z_2 U_E}{Z_1 R_2 + Z_1 Z_2 + R_1 R_2 + R_1 Z_2 + R_1 Z_1} \\
&= U_E \left(\frac{R_2}{Z_2} + 1 + \frac{R_1 R_2}{Z_1 Z_2} + \frac{R_1}{Z_1} + \frac{R_1}{Z_2} \right)^{-1} \\
&= U_E \left(1 + \frac{R_1}{Z_1} + \frac{R_1 + R_2}{Z_2} + \frac{R_1 R_2}{Z_1 Z_2} \right)^{-1} \\
&= \frac{U_0 \cdot e^{j\omega t}}{(1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2) + j\omega(R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2)}
\end{aligned}
$$

Die komplexe Zahl im Nenner sei A genannt und läßt sich auf die Form $A = |A| \cdot e^{j\varphi}$ bringen. Zu diesem Zweck seien Bezeichner für den Real- und Imaginärteil von A eingeführt:

$$
\begin{aligned}
c &:= \Re(A) = 1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \\
d &:= \Im(A) = \omega(R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2)
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sqrt{c^2 + d^2} \\
\tan\varphi &= \frac{d}{c}
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich als Resultat:

$$U_B = \frac{U_0 \cdot e^{j\omega t}}{|A| \cdot e^{j\varphi}} = \frac{U_0}{|A|} \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}$$

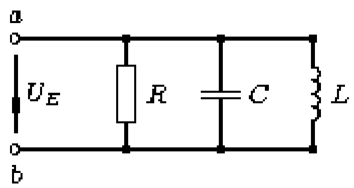
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 14.11.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 4

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende passive Schaltnetz:



Die Spannung über den Klemmen a und b sei $U_E = U_0 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$. Die Bauteile seien wie folgt dimensioniert: $R = 1\mathrm{k}\Omega$, $C = 8\mathrm{nF}$, $L = 2\mathrm{mH}$.

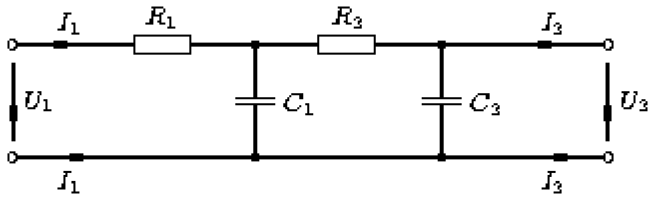
(1) Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz ω_0 des Schaltnetzes,

(2) Berechnen Sie den komplexen Widerstand Z zwischen a und b für folgende Kreisfrequenzen ω: 1Hz, 50kHz, 150kHz, 250kHz, 1MHz, 1GHz,

(3) Zeichnen Sie die (maßstabsgerechte!) Ortskurve für Z in Abhängigkeit von ω und machen Sie die in (2) berechneten Werte in der Kurve kenntlich.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Gegeben sei der folgende — bereits aus Aufgabe 8 bekannte — Vierpol:



Die Bauteile seien wie folgt dimensioniert: $R_1 = 10\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 1\mathrm{M}\Omega$, $C_1 = 2\mathrm{nF}$, $C_2 = 0{,}5\mu\mathrm{F}$.

Berechnen Sie zu diesem Vierpol die Parameter Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22} der Leitwertform.

Abgabe: Bis Mi., 28.11.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 4 — Musterlösung

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Der komplexe Widerstand Z der gegebenen Schaltung setzt sich aus einer Parallelschaltung von R, C und L zusammen:

$$Z = (R \parallel Z_C \parallel Z_L) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \tag{1}$$

Gesucht ist die Resonanzfrequenz ω_0, d.h. die Frequenz bei der der Imaginärteil von Z verschwindet. Aus (1) folgt, wie in der Vorlesung vorgestellt:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{8\,\mathrm{nF} \cdot 2\,\mathrm{mH}}} = \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}}} = \sqrt{\frac{10^{12}}{16\mathrm{s}^2}} = \frac{10^6}{4\mathrm{s}} = 250\,\mathrm{kHz}$$

Ebenfalls aus (1) erhält man (hier am Beispiel von $\omega = 50\,\mathrm{kHz}$) die gesuchten Widerstandswerte:

$$Z^{-1} = \frac{1}{1\,\mathrm{k\Omega}} + j\left(50\,\mathrm{kHz} \cdot 8\,\mathrm{nF} - \frac{1}{50\,\mathrm{kHz} \cdot 2\,\mathrm{mH}}\right) = \frac{1}{\mathrm{k\Omega}} + j\left(400 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vs}} - \frac{1}{100 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{As}}}\right)$$
$$= \left(1 + j\left(400 \cdot 10^{-3} - 10\right)\right) \frac{1}{\mathrm{k\Omega}} \approx (1 - j\ 10)\,\frac{1}{\mathrm{k\Omega}} = (1 - j\ 10)\,\mathrm{mS}$$

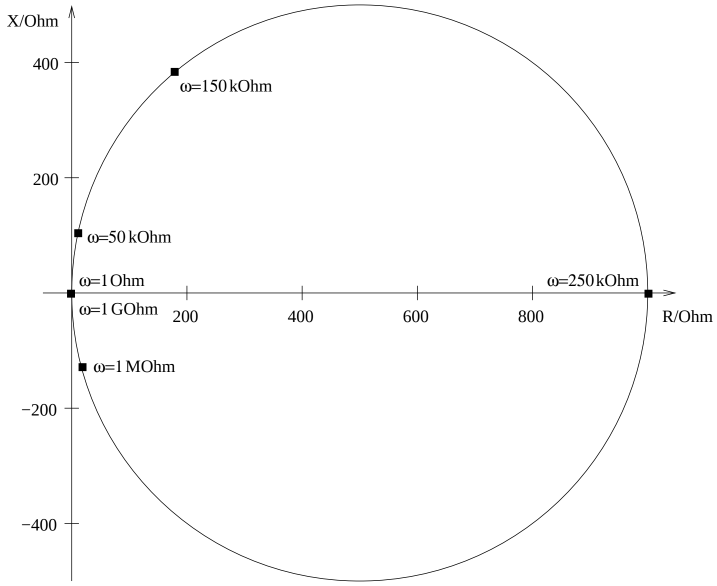
Es folgt also:

$$Z \approx \frac{(1 + j\ 10)}{1^2 + 10^2}\mathrm{k\Omega} \approx \frac{(1 + j\ 10)}{100}\mathrm{k\Omega} = (10 + j\ 100)\,\Omega$$

Analog berechnen sich die folgenden Werte (inklusive der Zwischenresultate für Z^{-1}):

ω	1 Hz	50 kHz	150 kHz	250 kHz	1 MHz	1 GHz
$\Re(Z^{-1})$	1 mS	1 mS	1 mS	1 mS	1 mS	1 mS
$\Im(Z^{-1})$	−500 S	−10 mS	−2.13 mS	0 S	7.5 mS	8 S
$\Re(Z)$	0 Ω	10 Ω	180 Ω	1 kΩ	17 Ω	0 Ω
$\Im(Z)$	2 mΩ	100 Ω	384 Ω	0 Ω	−131 Ω	−125 mΩ

Die passende Ortskurve:

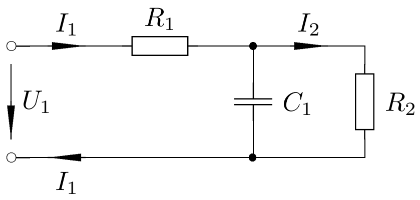


Aufgabe 10 (10 Punkte)

Gemäß den Vorgaben in der Vorlesung gilt:

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \tag{2}$$
$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \tag{3}$$

Kurzschließen der rechten Pins ($U_2 = 0\,\mathrm{V}$) führt zu folgendem Schaltbild, wobei der überbrückte Kondensator C_2 bereits entfernt ist:



Aus (2) und (3) folgt mit $U_2 = 0\,\mathrm{V}$:

$$\frac{1}{Y_{11}} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + (Z_{C_1} \parallel R_2) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{R_2}} \tag{4}$$
$$\frac{1}{Y_{21}} = \frac{U_1}{I_2} = -\frac{1}{Y_{12}} \tag{5}$$

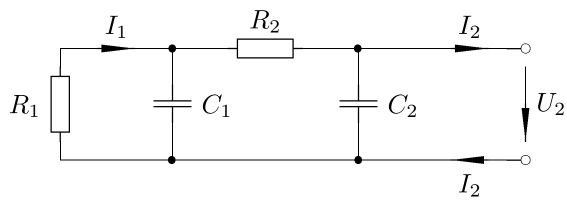
Um Y_{21} (und damit auch Y_{12}) zu berechnen, muß also U_1 in Abhängigkeit von I_2 bestimmt werden. Maschen- und Knotenregel liefert:

$$U_1 = I_1R_1 + I_2R_2 \tag{6}$$
$$I_1 = I_2 + I_{C_1} \tag{7}$$
$$Z_{C_1}I_{C_1} = R_2I_2 \quad \Rightarrow \quad I_{C_1} = \frac{R_2I_2}{Z_{C_1}} \tag{8}$$

Einsetzen von (6)–(8) in (5) liefert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y_{21}} &= \frac{U_1}{I_2} = \frac{I_1R_1 + I_2R_2}{I_2} = \frac{(I_2 + I_{C_1})R_1 + I_2R_2}{I_2} = \frac{\left(I_2 + \frac{R_2I_2}{Z_{C_1}}\right)R_1 + I_2R_2}{I_2} \\ &= R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{Z_{C_1}} = R_1 + R_2 + j\omega R_1R_2C_1 \end{aligned}\tag{9}$$

Kurzschließen der linken Pins ($U_1 = 0\,\mathrm{V}$) führt zu folgendem Schaltbild:



Aus (3) folgt mit $U_1 = 0\,\mathrm{V}$:

$$\frac{1}{Y_{22}} = \frac{U_2}{I_2} = -(Z_{C_2} \parallel (R_2 + (R_1 \parallel Z_{C_1}))) = -\left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}}\right)^{-1} \tag{10}$$

Einsetzen der gegebenen Werte in (4), (9) und (10) führt zum Endergebnis:

$$Y_{11} = \frac{1}{10\,\mathrm{k\Omega} + \frac{1}{j\omega 2\,\mathrm{nF} + \frac{1}{1\,\mathrm{M\Omega}}}} = \frac{1}{10\,\mathrm{k} + \frac{1}{j\frac{\omega}{\mathrm{GHz}}2 + 1\,\mu}}\Omega^{-1}$$

$$Y_{21} = \frac{1}{10\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{M\Omega} + j\omega 10\,\mathrm{k\Omega}\cdot 1\,\mathrm{M\Omega}\cdot 2\,\mathrm{nF}} \approx \frac{1}{1\,\mathrm{M} + j\frac{\omega}{\mathrm{Hz}}20}\Omega^{-1}$$

$$Y_{12} = -Y_{21}$$

$$Y_{22} = -\frac{1}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}} - j\omega C_2 = \left(-\frac{1}{1\,\mathrm{M} + \frac{1}{100\,\mathrm{m} + j\frac{\omega}{\mathrm{GHz}}2}} - j\frac{\omega}{\mathrm{THz}}500\right)\Omega^{-1}$$

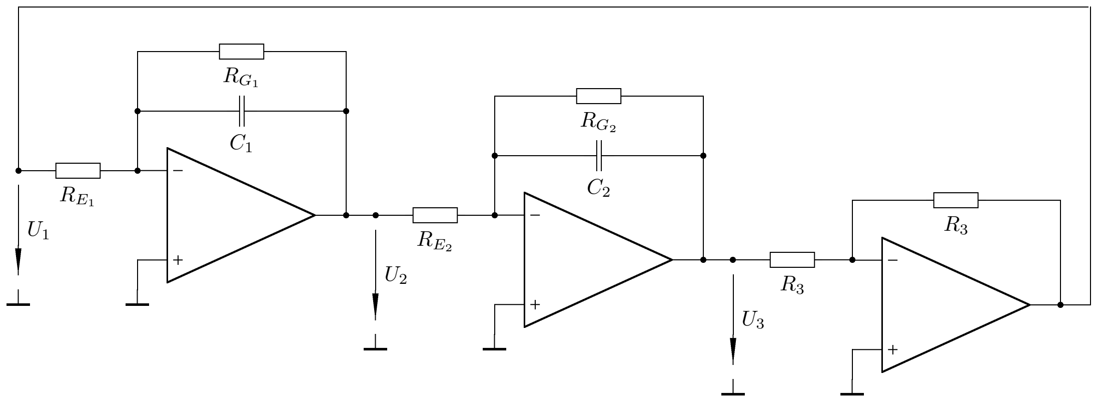
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 21.11.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 5

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Gegeben sei der folgende (bereits aus der Vorlesung bekannte) aus zwei Integratorschaltungen und einem Inverter bestehende Oszillator:



(1) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω der sich einstellenden Wechselspannung U_1 für folgende Bauteildimensionierungen:

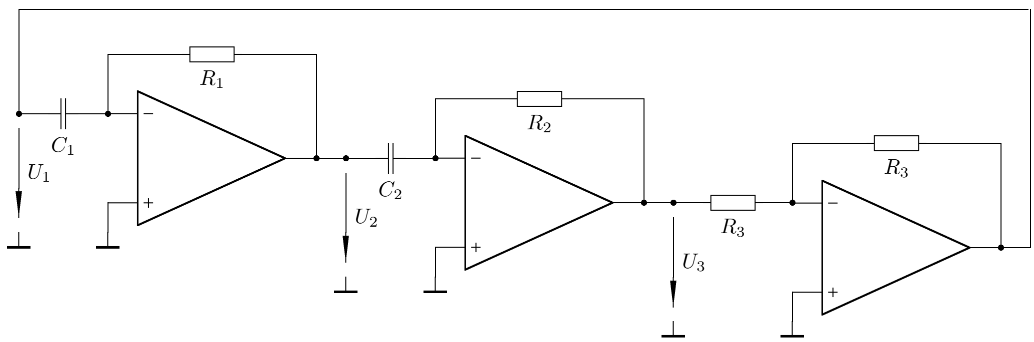
(a) $R_{E_1} = R_{E_2} = 1\text{k}\Omega$, $R_{G_1} = R_{G_2} = 1732\text{M}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$, $R_3 = 100\text{M}\Omega$,

(b) $R_{E_1} = 500\Omega, R_{G_1} = 4\text{M}\Omega, C_1 = 36\mu\text{F}$, $R_{E_2} = 2\text{k}\Omega, R_{G_2} = 200\text{M}\Omega, C_2 = 720\text{nF}$, $R_3 = 100\text{M}\Omega$.

(2) Berechnen Sie für die Werte aus (1b) die Zeit t zu der die Amplitude der Spannung U_1 auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes (d.h. gegenüber der Amplitude zur Zeit $t = 0\text{s}$) gesunken ist.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Anordnung:



Finden Sie heraus, ob es sich bei dieser Schaltung um einen Oszillator handelt oder nicht. Berechnen Sie dazu die Spannung U_1 in Abhängigkeit von R_1, R_2, C_1, C_2.

Hinweis: Es gilt, wie für die Anordnung aus Aufgabe 11, $U_1 = -U_3$.

Abgabe: Bis Mi., 05.12.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 5 — Musterlösung

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Laut Vorlesung gilt für die Spannung U_1 des Oszillators:

$$\frac{d^2}{dt^2}U_1 + p\,\frac{d}{dt}U_1 + q\,U_1 = 0 \qquad ,$$

wobei

$$p := \frac{1}{R_{G_1}C_1} + \frac{1}{R_{G_2}C_2} \qquad , \qquad q := \frac{1}{C_1C_2}\left(\frac{1}{R_{E_1}R_{E_2}} + \frac{1}{R_{G_1}R_{G_2}}\right) \qquad .$$

Für den Fall, daß die Nebenbedingung $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$ erfüllt ist, ergibt sich als Lösung dieser Differentialgleichung eine (gedämpfte) Schwingung der Form

$$U_1(t) = U_0\,e^{-\frac{p}{2}t}\,e^{j\omega t} \tag{1}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \qquad . \tag{2}$$

1.) Es sind die gegebenen Werten in (2) einzusetzen:

(a) Es ist $C_1 = C_2$, $R_{G_1} = R_{G_2} \gg R_{E_1} = R_{E_2}$ und $q \gg \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Also:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \approx \sqrt{q} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{C_1}\right)^2\left(\left(\frac{1}{R_{E_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{G_1}}\right)^2\right)} \approx \sqrt{\left(\frac{1}{C_1}\right)^2\left(\frac{1}{R_{E_1}}\right)^2} = \frac{1}{C_1R_{E_1}} \\
&= \frac{1}{1\,\mu\mathrm{F}\cdot 1\,\mathrm{k}\Omega} = \frac{1}{1\,\mathrm{ms}} = 1\,\mathrm{kHz} \qquad .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $R_{G_1}C_1 = 144\,\mathrm{s} = R_{G_2}C_2$. Daher:

$$\begin{aligned}
\omega = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{1}{R_{E_1}R_{E_2}C_1C_2} + \frac{1}{R_{G_1}C_1R_{G_2}C_2} - \left(\frac{1}{2R_{G_1}C_1} + \frac{1}{2R_{G_2}C_2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{R_{E_1}R_{E_2}C_1C_2} + \left(\frac{1}{R_{G_1}C_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R_{G_1}C_1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{R_{E_1}R_{E_2}C_1C_2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{500\,\Omega\cdot 2\,\mathrm{k}\Omega\cdot 36\,\mu\mathrm{F}\cdot 720\,\mathrm{nF}}} \approx \frac{1}{\sqrt{25\,\mu\mathrm{s}^2}} = \frac{1}{5\,\mathrm{ms}} = 200\,\mathrm{Hz} \qquad .
\end{aligned}$$

2.) Der Gleichung (1) läßt sich entnehmen, daß die (gedämpfte) Amplitude der Wechselspannung U_1 den Wert $U_0\,e^{-\frac{p}{2}t}$ annimmt. Zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ hat die Amplitude also den Wert U_0, zur gesuchten Zeit T soll sie auf $\frac{U_0}{2}$ abgefallen sein. Es gilt daher:

$$U_0\,e^{-\frac{p}{2}T} = \frac{U_0}{2} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\frac{p}{2}T} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{p}{2}T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad .$$

Es ergibt sich dann $T = \frac{2\ln 2}{p} = 144\,\mathrm{s}\cdot\ln 2 \approx 100\,\mathrm{s}$.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

In der gegebenen Anordnung gilt für die Operationsverstärker: Die in die Eingänge hineinfließenden Ströme betragen definitionsgemäß alle 0 A und die Knoten an den invertierenden Eingängen liegen auf Grund der Rückkopplung alle annähernd auf dem Spannungsniveau 0 V.

Somit ergibt sich für den linken Operationsverstärker:

$$I_{C_1} = I_{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 \frac{d}{dt} U_{C_1} = \frac{U_{R_1}}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 \frac{d}{dt} U_1 = \frac{-U_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow \qquad U_2 = -R_1 C_1 \frac{d}{dt} U_1 \qquad . \tag{3}$$

Analog erhält man für die beiden anderen Operationsverstärker:

$$U_3 = -R_2 C_2 \frac{d}{dt} U_2 \qquad , \tag{4}$$

$$U_1 = -U_3 \qquad . \tag{5}$$

Einsetzen von (5) in (4) und Ableiten von (3) liefert:

$$U_1 = R_2 C_2 \frac{d}{dt} U_2 \qquad , \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt} U_2 = -R_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} U_1 \qquad . \tag{7}$$

Einsetzen von (7) in (6) ergibt:

$$U_1 = -R_2 C_2 R_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} U_1 \qquad .$$

Dies ist wieder eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} U_1 + p \frac{d}{dt} U_1 + q\, U_1 = 0 \qquad ,$$

wobei

$$p := 0 \qquad , \qquad q := \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \qquad .$$

Die Nebenbedingung $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q > 0$ ist erfüllt, also ergibt sich als Lösung dieser Differentialgleichung eine (ungedämpfte!) Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad .$$

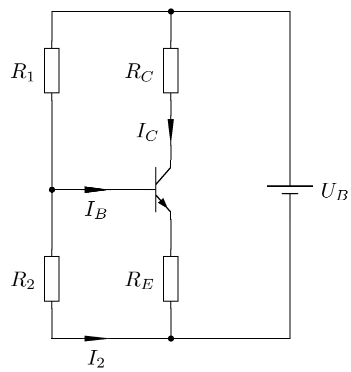
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 28.11.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 6

Aufgabe 13 (10 Punkte)

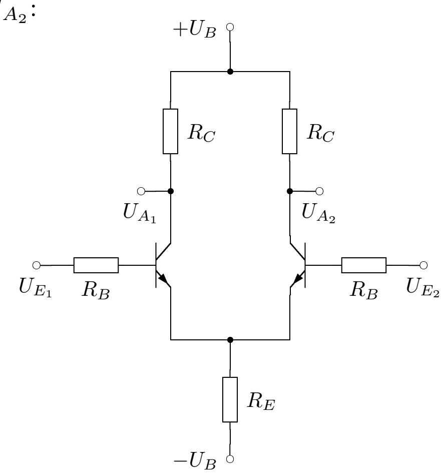
Gegeben sei die folgende Verstärkerschaltung:



Der Transistor wird im Bereich der Vorwärtsverstärkung betrieben. Im Arbeitspunkt soll gelten: $U_B = 10\,\text{V}$, $U_{BE} = 0.7\,\text{V}$, $U_{R_E} = 0.5\,\text{V}$, $U_{CE} = 5\,\text{V}$, $\beta_F = 100$, $I_2 = 10\,I_B$, $I_C = 1\,\text{mA}$.
Wie müssen die Widerstände R_1, R_2, R_C, R_E dimensioniert werden, damit sich dieser Arbeitspunkt einstellt?

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Gegeben sei der folgende Differenzverstärker mit zwei Eingangsspannungen U_{E_1}, U_{E_2} und zwei Ausgangsspannungen U_{A_1}, U_{A_2}:



Der Differenzverstärker ist aus zwei identischen Transistoren aufgebaut, die beide im Bereich der Vorwärtsverstärkung betrieben werden ($\beta_F = 100$, $U_{BE} = 0.7\,\text{V}$). Die Betriebsspannung betrage $U_B = 5\,\text{V}$.

(1) Berechnen Sie den Verstärkungsfaktor k der Anordnung. Es sei $k := \frac{U_{A_1} - U_{A_2}}{U_{E_1} - U_{E_2}}$.

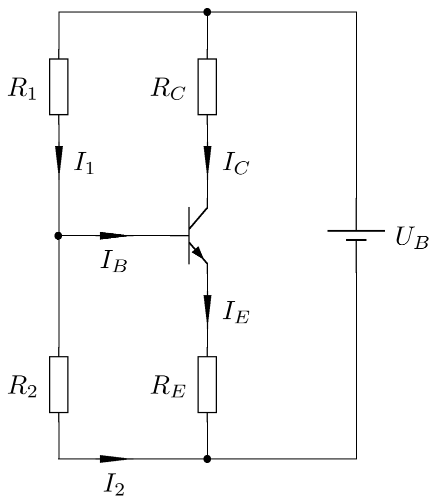
(2) Geben Sie passende Werte für die Widerstände R_B, R_C, R_E an, so daß sich ein Verstärkungsfaktor $k{=}{-4}$ einstellt und außerdem U_{A_1}, U_{A_2} symmetrisch um $0\,\text{V}$ liegen, d. h. $(U_{E_1}{=}U_{E_2}{=}0\,\text{V}) \Rightarrow (U_{A_1}{=}U_{A_2}{=}0\,\text{V})$ gilt.
Hinweis: Die beiden genannten Nebenbedingungen bestimmen keine eindeutigen Werte für die Widerstände, sondern lediglich bestimmte Verhältnisse der Werte zueinander. Wählen Sie aus den passenden Möglichkeiten eine beliebige aus.

Abgabe: Bis Mi., 12.12.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 6 — Musterlösung

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Gegeben ist die folgende Schaltung:



Wegen $\beta_F = 100$ und $\beta_F I_B = I_C$ folgt:

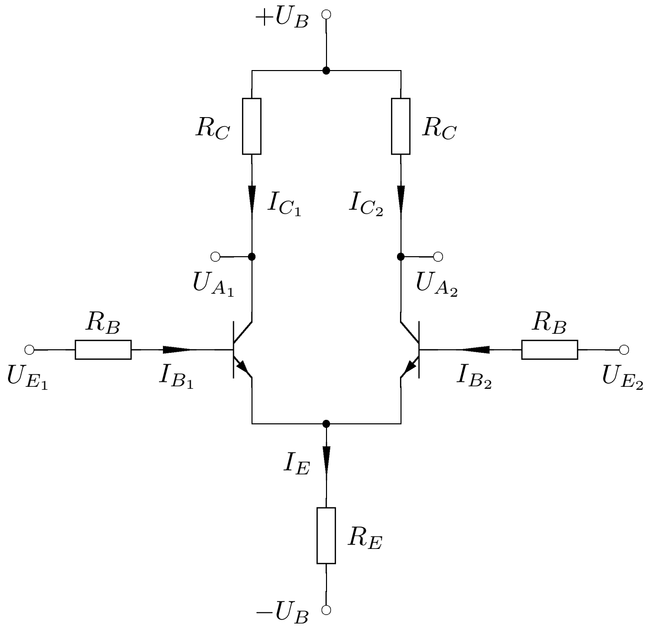
$$\begin{aligned}
I_B &= \frac{1}{100}\text{mA} = 10\,\mu\text{A} \\
I_E &= I_B + I_C = 1010\,\mu\text{A} \\
I_2 &= 10\,I_B = 100\,\mu\text{A} \\
I_1 &= I_2 + I_B = 110\,\mu\text{A} \qquad .
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Widerstände zu:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{U_{R_1}}{I_1} = \frac{U_B - U_{BE} - U_{R_E}}{I_1} = \frac{8.8}{110}\text{M}\Omega = 80\,\text{k}\Omega \\
R_2 &= \frac{U_{R_2}}{I_2} = \frac{U_B - U_{R_1}}{I_2} = \frac{1.2}{100}\text{M}\Omega = 12\,\text{k}\Omega \\
R_C &= \frac{U_{R_C}}{I_C} = \frac{U_B - U_{CE} - U_{R_E}}{I_C} = \frac{4.5}{1}\text{k}\Omega = 4.5\,\text{k}\Omega \\
R_E &= \frac{U_{R_E}}{I_E} = \frac{0.5}{1010}\text{M}\Omega = 495\,\Omega \qquad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Gegeben ist die folgende Schaltung, wobei für beide Transistoren $\beta_F = 100$ und $U_{BE} = 0.7\,\mathrm{V}$ gilt:



1.) Es gilt $U_{A_1} = U_B - R_C I_{C_1}$ sowie $U_{A_2} = U_B - R_C I_{C_2}$. Daraus ergibt sich

$$U_{A_1} - U_{A_2} = R_C(I_{C_2} - I_{C_1}) \qquad .$$

Weiterhin gilt $U_{E_1} = R_B I_{B_1} + U_{BE} + R_E I_E - U_B$ sowie $U_{E_2} = R_B I_{B_2} + U_{BE} + R_E I_E - U_B$ und damit

$$U_{E_1} - U_{E_2} = R_B(I_{B_1} - I_{B_2}) \qquad .$$

Wegen $I_{C_1} = 100\,I_{B_1}$ und $I_{C_2} = 100\,I_{B_2}$ ergibt sich schließlich:

$$k = \frac{U_{A_1} - U_{A_2}}{U_{E_1} - U_{E_2}} = \frac{R_C(I_{C_2} - I_{C_1})}{R_B(I_{B_1} - I_{B_2})} = -\frac{100\,R_C}{R_B} \qquad .$$

2.) Um einen Verstärkungsfaktor von -4 zu erreichen, muß gelten $-\frac{100\,R_C}{R_B} = -4$, d. h.

$$R_B = 25\,R_C \qquad .$$

Wenn $U_{E_1} = 0\,\mathrm{V}$ gilt, so folgt $R_B I_{B_1} + U_{BE} + R_E I_E = U_B$ und somit

$$R_E I_E = U_B - U_{BE} - R_B I_{B_1} \qquad .$$

Bei symmetrischer Beschaltung mit $U_{E_1} = U_{E_2} = 0\,\mathrm{V}$ gilt $I_E = 2(I_{C_1} + I_{B_1}) = 202\,I_{B_1}$. Daraus folgt

$$R_E = \frac{U_B - U_{BE}}{202\,I_{B_1}} - \frac{R_B}{202} \qquad .$$

Um $0\,\mathrm{V}$ für U_{E_1} zu erreichen, muß gelten $R_C I_C = U_B$. Mit $I_{C_1} = 100\,I_{B_1}$ erhalten wir $I_{B_1} = \frac{1}{100}\frac{U_B}{R_C}$ und somit

$$R_E = \frac{U_B - U_{BE}}{\frac{202}{100}\frac{U_B}{R_C}} - \frac{R_B}{202} = \frac{1}{202}(100\frac{U_B - U_{BE}}{U_B} R_C - R_B) \qquad .$$

Wählen wir $R_C = 1\,\mathrm{k}\Omega$, so folgt:

$$R_B = 25\,R_C = 25\,\mathrm{k}\Omega$$
$$R_E = \frac{1}{202}(100\frac{U_B - U_{BE}}{U_B} R_C - R_B) \approx 300\,\Omega \qquad .$$

Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 05.12.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 7

Aufgabe 15 (10 Punkte)

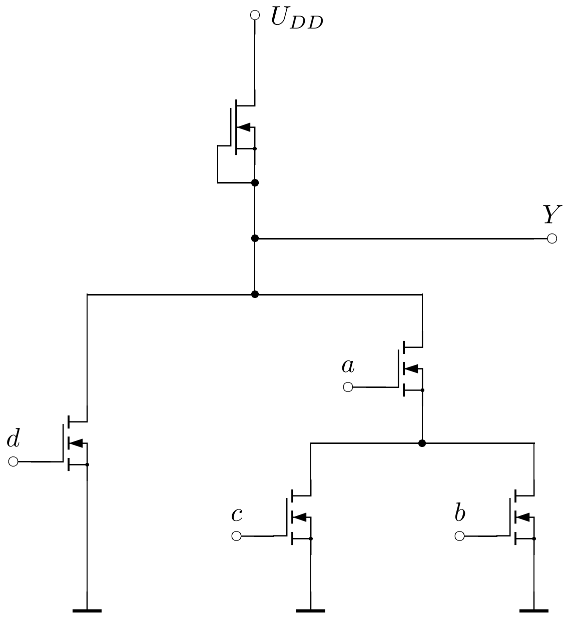
Gegeben sei die folgende boolsche Funktion Y über Variablen p, q, r, s:

$$Y = \neg(p \vee \neg(\neg q \vee \neg(r \vee s)))$$

Geben Sie eine Schaltung in NMOS-Technik mit Eingängen p, q, r, s und Ausgang Y an, die diese Funktion realisiert.

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Schaltung in NMOS-Technik mit Eingängen a, b, c, d und Ausgang Y:



Geben Sie die boolsche Funktion an, die durch diese Schaltung realisiert wird.

Anmerkung: Aus technischen Gründen unterscheiden sich die hier verwendeten Symbole für die MOSFETs etwas von denen aus der Vorlesung. Nichtsdestoweniger ist der obere Transistor ein Verarmungstyp-Transistor, während die unteren Anreicherungstyp-Transistoren sind.

Abgabe: Bis Mi., 19.12.2001, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 7 — Musterlösung

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Die boolsche Funktion $Y(a, b, c, d)$, die durch die Schaltung realisiert wird, läßt sich wie folgt herleiten:

Die Parallelschaltung der MOSFETs mit den Eingängen c und b ergibt den Term $(c \vee b)$. Berücksichtigung des in Reihe nachgeschalteten MOSFETs mit dem Eingang a führt zu dem Term $(a \wedge (c \vee b))$. Zusammen mit dem parallel nachgeschalteten MOSFET mit dem Eingang d ergibt sich der Term $(d \vee (a \wedge (c \vee b)))$. Da das Ausgangssignal einer NMOS-Logik-Stufe immer negiert vorliegt, gilt insgesamt:

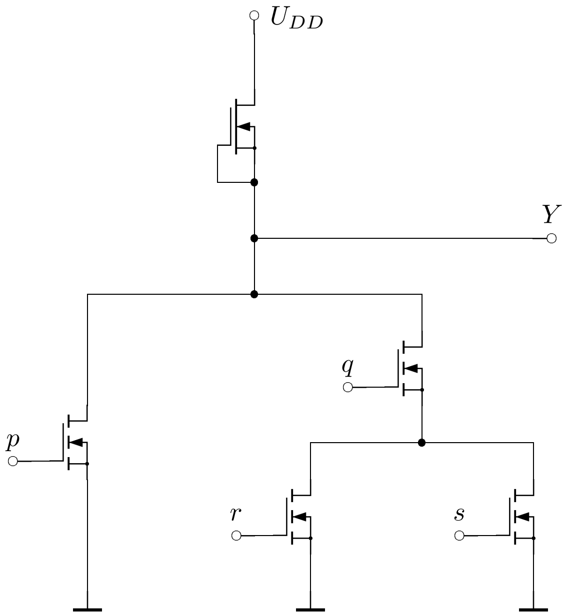
$$Y(a, b, c, d) = \neg(d \vee (a \wedge (c \vee b))) \tag{1}$$

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Die gegebene boolsche Funktion $Y(p, q, r, s)$ läßt sich äquivalent umformen, indem die zweite Negation von links in den nachfolgenden Klammerterm hineingetrieben wird:

$$Y(p, q, r, s) = \neg(p \vee \neg(\neg q \vee \neg(r \vee s))) = \neg(p \vee (q \wedge (r \vee s))) \tag{2}$$

Bei diesem Resultat fällt auf, daß (2) bis auf die Benennung der Variablen identisch mit (1) ist. Es kann hier also der gleiche Schaltungsaufbau verwendet werden, wie in Aufgabe 16:



Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 12.12.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 8

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Wandeln Sie durch systematische Anwendung der in der Vorlesung vorgestellten Tautologien die folgenden aussagenlogischen Ausdrücke jeweils in konjunktive und disjunktive kanonische Formen um:

1.) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow S) \wedge \neg(R \Rightarrow P)$

2.) $(\neg(P \Leftrightarrow Q) \wedge R) \Leftrightarrow \neg(R \vee P)$

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden aussagenlogischen Ausdrücke Tautologien sind und beweisen Sie Ihr Ergebnis:

1.) $(((G \wedge H) \Leftrightarrow G) \Rightarrow H)$

2.) $((G \vee (G \wedge H)) \Rightarrow (G \wedge (G \vee H)))$

3.) $((\neg G \Rightarrow \neg H) \Rightarrow (G \Rightarrow H))$

4.) $(((G \vee H) \wedge (\neg G \vee Q)) \Rightarrow (G \vee Q))$

Abgabe: Bis Mi., 09.01.2002, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 8 — Musterlösung

In den folgenden Umformungen sind an allen Äquivalenzpfeilen die Nummern der verwendeten Tautologien, entsprechend der in der Vorlesung verwendeten Nummerierung, angegeben.

Aufgabe 17 (10 Punkte)

1.) Durch äquivalente Umformung des Ausdrucks ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow S) \wedge \overline{(R \Rightarrow P)} \\
\Longleftrightarrow\ & ((\overline{\overline{P} \vee Q}) \vee S) \wedge (\overline{\overline{R} \vee P}) \\
{\scriptstyle 9,8} \Longleftrightarrow\ & ((P \wedge \overline{Q}) \vee S) \wedge R \wedge \overline{P} \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\ & (P \vee S) \wedge (\overline{Q} \vee S) \wedge R \wedge \overline{P} \\
{\scriptstyle 5,7,6} \Longleftrightarrow\ & S \wedge (\overline{Q} \vee S) \wedge R \wedge \overline{P} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Die KKF ergibt sich aus (1) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
{\scriptstyle 6,7} \Longleftrightarrow\ & (S \vee (P \wedge \overline{P})) \wedge ((\overline{Q} \vee S) \vee (P \wedge \overline{P})) \wedge (R \vee (P \wedge \overline{P})) \wedge \overline{P} \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\ & (P \vee S) \wedge (\overline{P} \vee S) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee S) \wedge (P \vee R) \wedge (\overline{P} \vee R) \wedge \overline{P} \\
{\scriptstyle 6,7,5} \Longleftrightarrow\ & (P \vee \overline{Q} \vee S) \wedge (P \vee Q \vee S) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee S) \\
& \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee R) \wedge (\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q}) \\
{\scriptstyle 6,7,5} \Longleftrightarrow\ & (P \vee \overline{Q} \vee R \vee S) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee S) \wedge (P \vee Q \vee R \vee S) \wedge (P \vee Q \vee \overline{R} \vee S) \\
& \wedge (\overline{P} \vee Q \vee R \vee S) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R} \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee S) \\
& \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee R) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \\
{\scriptstyle 6,7,5} \Longleftrightarrow\ & (P \vee \overline{Q} \vee R \vee S) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee S) \wedge (P \vee Q \vee R \vee S) \wedge (P \vee Q \vee \overline{R} \vee S) \\
& \wedge (\overline{P} \vee Q \vee R \vee S) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R} \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R \vee S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee S) \\
& \wedge (P \vee Q \vee R \vee \overline{S}) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee R \vee \overline{S}) \wedge (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R} \vee \overline{S}) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R \vee \overline{S}) \\
& \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee \overline{S}) \quad .
\end{aligned}
$$

Die DKF ergibt sich aus (1) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\ & (S \wedge \overline{Q} \wedge R \wedge \overline{P}) \vee (S \wedge R \wedge \overline{P}) \\
{\scriptstyle 6,7} \Longleftrightarrow\ & (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge R \wedge S) \vee ((\overline{P} \wedge R \wedge S) \wedge (Q \vee \overline{Q})) \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\ & (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge R \wedge S) \vee (\overline{P} \wedge R \wedge SQ) \vee (\overline{P} \wedge R \wedge S \wedge \overline{Q}) \quad .
\end{aligned}
$$

2.) Durch äquivalente Umformung des Ausdrucks ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& (\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \wedge R) \Leftrightarrow \overline{(P \vee R)} \\
\Longleftrightarrow\quad & (\overline{((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))} \wedge R) \Leftrightarrow \overline{(P \vee R)} \\
\Longleftrightarrow\quad & (\overline{((\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee P))} \wedge R) \Leftrightarrow \overline{(P \vee R)} \\
{\scriptstyle 9,9,9} \Longleftrightarrow\quad & (((P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})) \wedge R) \Leftrightarrow \overline{(P \vee R)} \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\quad & ((P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R)) \Leftrightarrow \overline{(P \vee R)} \\
\Longleftrightarrow\quad & (((P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R)) \Rightarrow \overline{(P \vee R)}) \\
& \wedge (\overline{(P \vee R)} \Rightarrow ((P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R))) \\
\Longleftrightarrow\quad & (\overline{((P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R))} \vee \overline{(P \vee R)}) \\
& \wedge (\overline{\overline{(P \vee R)}} \vee ((P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R))) \\
{\scriptstyle 9,9,9,8} \Longleftrightarrow\quad & (((\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R})) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \\
& \wedge (P \vee R \vee (P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R)) \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\quad & (((\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R})) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \\
& \wedge (P \vee (R \wedge (1 \vee (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)))) \\
{\scriptstyle 6,6} \Longleftrightarrow\quad & (((\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R})) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee R) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Die KKF ergibt sich aus (2) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& (((\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R})) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\quad & (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R} \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R} \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 5,5} \Longleftrightarrow\quad & (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 6,6,6} \Longleftrightarrow\quad & (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 6,7} \Longleftrightarrow\quad & (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (P \vee R \vee (\overline{Q} \wedge Q)) \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\quad & (\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \quad .
\end{aligned}
$$

Die DKF ergibt sich aus (2) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& (((\overline{P} \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \overline{Q} \vee \overline{R})) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 5,7,6} \Longleftrightarrow\quad & ((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (\overline{Q} \wedge \overline{R})) \wedge (P \vee R) \\
{\scriptstyle 5} \Longleftrightarrow\quad & (((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (\overline{Q} \wedge \overline{R})) \wedge P) \\
& \vee (((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (\overline{Q} \wedge \overline{R})) \wedge R) \\
{\scriptstyle 5,7,5,7} \Longleftrightarrow\quad & (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}) \\
& \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \\
\Longleftrightarrow\quad & (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge R) \quad .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 18 (10 Punkte)

1.) Keine Tautologie.
Gegenbeispiel: Setze $G := 0$, $H := 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & (((0 \wedge 0) \Leftrightarrow 0) \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & ((0 \Leftrightarrow 0) \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & (1 \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 \quad . \end{aligned}$$

2.) Tautologie.
Beweis:

$$\begin{aligned} & ((G \vee (G \wedge H)) \Rightarrow (G \wedge (G \vee H))) \\ {}_5 \Longleftrightarrow\quad & ((G \vee (G \wedge H)) \Rightarrow ((G \wedge G) \vee (G \wedge H))) \\ {}_1 \Longleftrightarrow\quad & ((G \vee (G \wedge H)) \Rightarrow (G \vee (G \wedge H))) \\ \Longleftrightarrow\quad & 1 \quad . \end{aligned}$$

3.) Keine Tautologie.
Gegenbeispiel: Setze $G := 1$ und $H := 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & ((\neg 1 \Rightarrow \neg 0) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)) \\ \Longleftrightarrow\quad & ((0 \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)) \\ \Longleftrightarrow\quad & (1 \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 \quad . \end{aligned}$$

4.) Keine Tautologie.
Gegenbeispiel: Setze $G := 0$, $H := 1$, $Q := 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & (((0 \vee 1) \wedge (\neg 0 \vee 0)) \Rightarrow (0 \vee 0)) \\ \Longleftrightarrow\quad & ((1 \wedge (1 \vee 0)) \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & ((1 \wedge 1) \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & (1 \Rightarrow 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 \quad . \end{aligned}$$

Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 19.12.2001

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 9

Aufgabe 19 (20 Punkte)

Minimieren Sie den folgenden aussagenlogischen Term mit Hilfe des Quine-McCluskey-Verfahrens:

$$\begin{aligned}
& \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \\
\vee\; & \overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \;\vee\; x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \\
\vee\; & \overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \;\vee\; \overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \;\vee\; x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \;\vee\; x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \\
\vee\; & x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \;\vee\; \overline{x_0}\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \;\vee\; x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \;\vee\; x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}
\end{aligned}$$

Abgabe: Bis Mi., 16.01.2002, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 9 — Musterlösung

Aufgabe 19 (20 Punkte)

Zuerst werden die Minterme nach der Anzahl der Negationen klassifiziert:

(2) $\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$	(8) $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	(16) $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
(9) $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	(12) $\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	(17) $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$
(20) $x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	(24) $x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	
(11) $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$	(13) $\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$	(21) $x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$
(25) $x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	(28) $x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	
(15) $\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	(29) $x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$	(30) $x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}$

Die Ausführung des ersten Durchlaufes des Quine-McCluskey-Verfahrens (Verschmelzung von Termen mit anschließender Klassifizierung) liefert:

$(8,9)$ $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$(8,12)$ $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$(8,24)$ $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
$(16,17)$ $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$(16,20)$ $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$(16,24)$ $x_0\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
$(9,11)$ $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,x_4$	$(9,13)$ $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_3}\,x_4$	$(9,25)$ $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$
$(12,13)$ $\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}$	$(12,28)$ $x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$(17,21)$ $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4$
$(17,25)$ $x_0\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	$(20,21)$ $x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}$	$(20,28)$ $x_0\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
$(24,25)$ $x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$(24,28)$ $x_0\,x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	
$(11,15)$ $\overline{x_0}\,x_1\,x_3\,x_4$	$(13,15)$ $\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,x_4$	$(13,29)$ $x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$
$(21,29)$ $x_0\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$	$(25,29)$ $x_0\,x_1\,\overline{x_3}\,x_4$	$(28,29)$ $x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}$
$(28,30)$ $x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_4}$		

Der Term (2) konnte mit keinem anderen Term verscholzen werden, steht daher bereits als Primimplikant fest:

$$(2)\quad \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \quad .$$

Der zweite Durchlauf ergibt:

$(8,9,12,13)$ $\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_3}$	$(8,9,24,25)$ $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$(8,12,24,28)$ $x_1\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
$(16,17,24,25)$ $x_0\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$(16,17,20,21)$ $x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_3}$	$(16,20,24,28)$ $x_0\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$
$(9,11,13,15)$ $\overline{x_0}\,x_1\,x_4$	$(9,13,25,29)$ $x_1\,\overline{x_3}\,x_4$	$(12,13,28,29)$ $x_1\,x_2\,\overline{x_3}$
$(17,21,25,29)$ $x_0\,\overline{x_3}\,x_4$	$(20,21,28,29)$ $x_0\,x_2\,\overline{x_3}$	$(24,25,28,29)$ $x_0\,x_1\,\overline{x_3}$

Somit ist mit (28,30) ein weiterer Primimplikant gefunden:

$$(2)\quad \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \quad , \quad (28,30)\quad x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_4} \quad .$$

Der dritte Durchlauf ergibt zwei neue Terme

$$\begin{array}{rcc} (8,9,12,13,24,25,28,29) & x_1 & \overline{x_3} \\ (16,17,24,25,20,28,21,29) & x_0 & \overline{x_3} \end{array}$$

und den dritten Primimplikanten (9,11,13,15).

Weitere Durchläufe führen zu keiner Veränderung, d. h. alle Primimplikanten sind gefunden:

$$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \quad , \quad x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_4} \quad , \quad \overline{x_0}\,x_1\,x_4 \quad , \quad x_1\,\overline{x_3} \quad , \quad x_0\,\overline{x_3} \quad .$$

Nun muß noch eine minimale Überdeckung gefunden werden. Dazu werden zuerst alle wesentlichen Primimplikanten ermittelt:

		$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$	$x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_4}$	$\overline{x_0}\,x_1\,x_4$	$x_1\,\overline{x_3}$	$x_0\,\overline{x_3}$
(2)	$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$	W				
(8)	$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$				W	
(16)	$x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$					W
(9)	$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$			*	*	
(12)	$\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$				W	
(17)	$x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$					W
(20)	$x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$					W
(24)	$x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$				*	*
(11)	$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$			W		
(13)	$\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$			*	*	
(21)	$x_0\,\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$					W
(25)	$x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$				*	*
(28)	$x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$		*		*	*
(15)	$\overline{x_0}\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$			W		
(29)	$x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$				*	*
(30)	$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}$		W			

In jeder Spalte taucht eine wesentliche Zuordnung auf, gekennzeichnet durch ein „W“. Deshalb sind alle Primimplikanten wesentlich und demzufolge in der Minimalform enthalten:

$$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \quad \vee \quad x_0\,x_1\,x_2\,\overline{x_4} \quad \vee \quad \overline{x_0}\,x_1\,x_4 \quad \vee \quad x_1\,\overline{x_3} \quad \vee \quad x_0\,\overline{x_3} \quad .$$

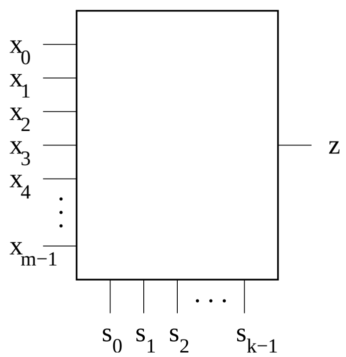
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 09.01.2002

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 10

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Ein 2^k:1-Multiplexer ist ein Schaltnetz, das genau einen von $m = 2^k$ Eingängen $x_0, \ldots, x_{m-1}$ auf einen Ausgang z durchschaltet, und diesen Eingang mithilfe von k Steuereingängen $s_0, \ldots, s_{k-1}$ auswählt:



Die Auswahl des Eingangs $x_i \mid i \in \{0, \ldots, m-1\}$ soll durch Belegung der Steuerleitungen mit Werten aus $\{0, 1\}$ so erfolgen, daß sich der Index i ergibt zu

$$i = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \cdot s_j \quad .$$

- Geben Sie den Boole'schen Ausdruck für die hierfür erforderliche Schaltfunktion an.
- Stellen Sie die Realisierung dieses Ausdruckes für $m = 4$ ausschließlich mithilfe von NAND-Gattern und Invertern graphisch dar.
- Geben sie an, wieviele Transistoren erforderlich sind, wenn diese Schaltung in CMOS-Technologie implementiert wird.

Aufgabe 21 (5 Punkte)

Ein Demultiplexer ist das zum Multiplexer komplementäre Schaltnetz, das einen Eingang x auf genau einen von $m = 2^k$ Ausgängen $z_0, \ldots, z_{m-1}$ durchschaltet (alle anderen Ausgänge werden mit 0 belegt), und zur Auswahl dieses Ausgangs wiederum k Steuerleitungen $s_0, \ldots, s_{k-1}$ benutzt, die wie in Aufgabe 20 zu verwenden sind.

- Geben Sie den Boole'schen Ausdruck für die hierfür erforderliche Schaltfunktion an.
- Stellen Sie die Realisierung dieses Ausdruckes für $m = 4$ ausschließlich mithilfe von NAND-Gattern und Invertern graphisch dar.
- Geben sie an, wieviele Transistoren erforderlich sind, wenn diese Schaltung in CMOS-Technologie implementiert wird.

Aufgabe 22 (5 Punkte)

Stellen Sie in Form eines Blockschaltbildes dar, wie ein 16:1-Multiplexer aus 4:1-Multiplexern aufgebaut werden kann.

Aufgabe 23 (5 Punkte)

Wie kann mithilfe eines 2^k:1-Multiplexers jede beliebige Schaltfunktion

$$z = f(u_0, \ldots, u_{k-1})$$

realisiert werden?

Geben Sie konkret an, wie die Eingänge und Steuerleitungen eines 16:1-Multiplexers zu belegen sind, wenn der Ausdruck

$$u_0 \wedge (u_1 \vee (u_2 \wedge \overline{u_3}))$$

realisiert werden soll.

Abgabe: Bis Mi., 23.01.2002, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 10 — Musterlösung

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Sei S_i^k die Konjunktion der Steuersignale $s_0, \ldots, s_{k-1}$ derart, daß gilt:

$$S_i^k = 1 \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \cdot s_j = i \quad .$$

(Es gilt zum Beispiel $S_6^4 \equiv \overline{s_3}\, s_2\, s_1\, \overline{s_0}$.) Dann ist

$$z = \bigvee_{i=0}^{k-1} x_i\, S_i^k = x_0\, S_0^k \vee x_1\, S_1^k \vee \cdots \vee x_{k-1}\, S_{k-1}^k$$

der gesuchte boolesche Ausdruck.

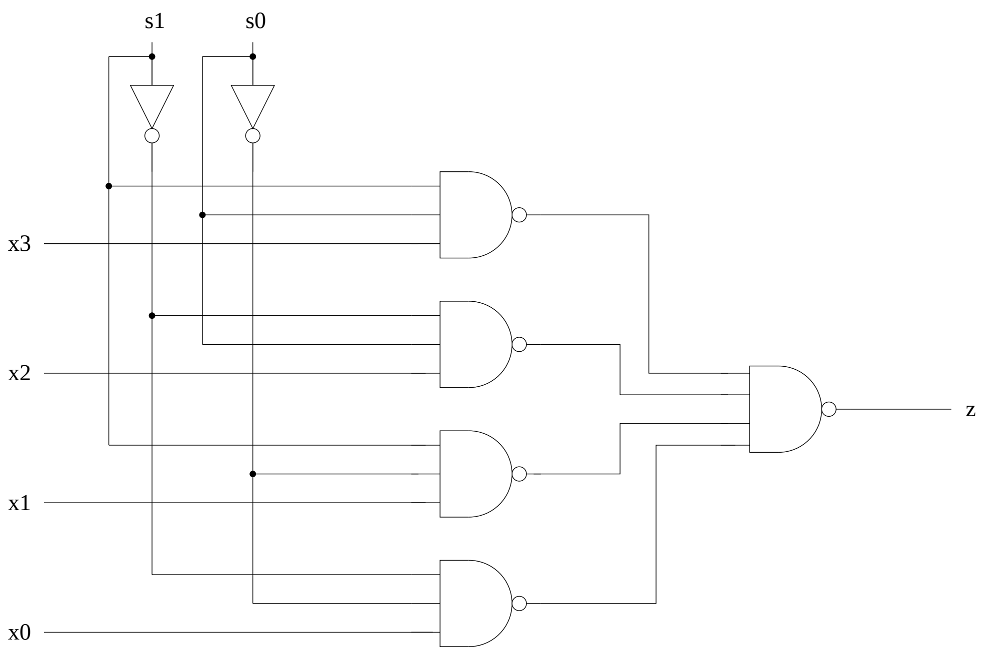
Für $k = 2$ ergibt sich:

$$z = x_0\, \overline{s_1}\, \overline{s_0} \vee x_1\, \overline{s_1}\, s_0 \vee x_2\, s_1\, \overline{s_0} \vee x_3\, s_1\, s_0 \quad .$$

Nach zweimaligem Invertieren folgt:

$$z = \neg(\neg(x_0\, \overline{s_1}\, \overline{s_0}) \wedge \neg(x_1\, \overline{s_1}\, s_0) \wedge \neg(x_2\, s_1\, \overline{s_0}) \wedge \neg(x_3\, s_1\, s_0)) \quad .$$

Diese Form des Ausdrucks lässt sich nun wie folgt mit Hilfe von NAND-Gattern und Invertern darstellen:



Bei Realisierung in CMOS-Logik werden für jeden Inverter zwei Transistoren und für jedes NAND-Gatter zwei Transistoren pro Eingang benötigt. Also sind in diesem Fall

$$2 \cdot 2 \text{ (Inv)} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (NAND3)} + 1 \cdot 4 \cdot 2 \text{ (NAND4)} = 4 + 24 + 8 = 36$$

Transistoren notwendig.

Aufgabe 21 (5 Punkte)

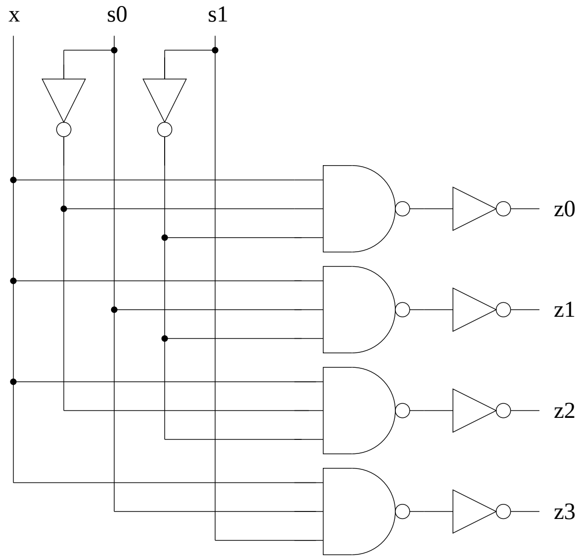
Sei S_i^k wie in Aufgabe 20 definiert. Dann ergibt sich für jeden Ausgang z_i der boolesche Ausdruck

$$z_i = x\, S_i^k \quad .$$

Für $k = 2$ ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} z_0 &= x\,\overline{s_1}\,\overline{s_0} = \neg\neg(x\,\overline{s_1}\,\overline{s_0}) \\ z_1 &= x\,\overline{s_1}\,s_0 = \neg\neg(x\,\overline{s_1}\,s_0) \\ z_2 &= x\,s_1\,\overline{s_0} = \neg\neg(x\,s_1\,\overline{s_0}) \\ z_3 &= x\,s_1\,s_0 = \neg\neg(x\,s_1\,s_0) \quad . \end{aligned}$$

Auch diese Audrücke lassen sich ausschließlich mit Hilfe von NAND-Gattern und Invertern darstellen:



Für die Realisierung in CMOS-Logik werden in diesem Fall

$$6 \cdot 2 \text{ (Inv)} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (NAND3)} = 12 + 24 = 36$$

Transistoren benötigt.

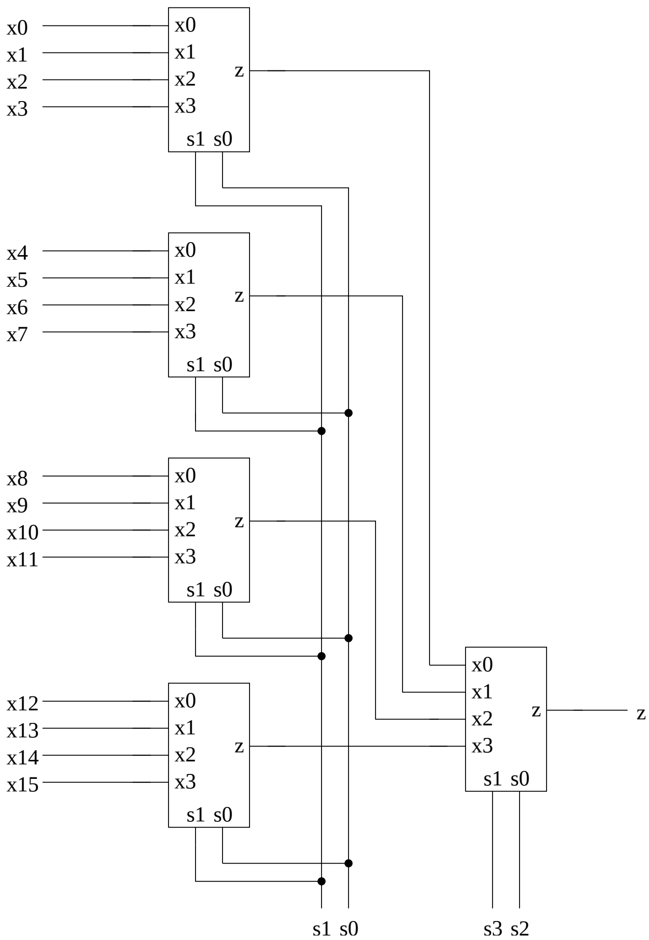
Aufgabe 22 (5 Punkte)

Die Wahrheitstabelle eines 16:1-Multiplexers sieht wie folgt aus:

i	s_3	s_2	s_1	s_0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Der Tabelle läßt sich entnehmen, daß ein 16:1-Multiplexer aus zwei 4:1-Multiplexer-Stufen aufgebaut werden kann: Über die Steuersignale s_3 und s_2 lassen sich die 16 Eingänge in vier Vierergruppen ($x_0 \ldots x_3$, $x_4 \ldots x_7$, $x_8 \ldots x_{11}$, $x_{12} \ldots x_{15}$) einteilen. Die einzelnen Eingänge einer solchen Vierergruppe können dann mit Hilfe der Steuersignale s_1 und s_0 unterschieden werden.

Es ergibt sich folgendes Blockschaltbild:



Aufgabe 23 (5 Punkte)

Eine Schaltfunktion $f(u_0, \ldots, u_{k-1})$ nimmt ihr Ergebnis abhängig von den 2^k möglichen Wahrheitswertbelegungen ihrer Parameter u_0, $\ldots$, u_{k-1} an. Der Ausgang eines 2^k Multiplexer nimmt ebenfalls abhängig von 2^k möglichen Wahrheitswertbelegungen seiner Steuerleitungen verschiedene Werte an, nämlich die 2^k an den Eingängen anliegenden. Belegt man nun einen Multiplexer derart, das man die k Parameter der Schaltfunktion als Steuerleitungen verwendet und den Eingängen jeweils den entsprechenden Wert der Schaltfunktion zuordnet, so realisiert die erhaltene Schaltung die gegebene Schaltfunktion.

Als Beispiel diene die Funktion

$$f(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_0 \wedge (u_1 \vee (u_2 \wedge \overline{u_3})) \quad .$$

Belegt man die Steuerleitungen eines 16:1-Multiplexers mit den Parametern der Funktion (also $s_3 = u_3$, $s_2 = u_2$, $s_1 = u_1$, $s_0 = u_0$), so ergeben sich folgende Belegungen für die Eingänge x_i, um die Schaltfunktion zu realisieren:

i	u_3	u_2	u_1	u_0	$x_i = (u_0 \wedge (u_1 \vee (u_2 \wedge \overline{u_3})))$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 16.1.2002

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 11

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Überlegen Sie sich, wie die folgenden Additionen bzw. Subtraktionen auf einem 8-Bit Addierer ausgeführt werden. Wandeln Sie dazu zunächst die einzelnen Operanden in ihre jeweiligen 8-Bit Binärdarstellungen um und bestimmen sie dann die Ergebnisse der Berechnungen sowohl in Binär- als auch in Dezimaldarstellung. Erläutern sie dabei die Rolle des Carry-In sowie der Carry-Bits c_6 und c_7.

a) (-2) + (-5)

b) (-3) - (-1)

c) (-4) + 7

d) 5 + (-123)

e) (-1) - 127

f) (-96) - 42

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Um sich die Konvertierung von Dezimal- in Binärdarstellung zu ersparen, findet der sog. BCD-Code (für Binary Coded Digits) Verwendung. Im BCD-Code werden die einzelnen Ziffern von Dezimalzahlen separat dargestellt. Jede der Ziffern (0-9) wird durch ihre Binär-Codierung gemäß folgender Tabelle repräsentiert:

0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

Die Zahl 381 wird also zum Beispiel durch die Bitfolge 0011 1000 0001 dargestellt. Auf eine Darstellung negativer Zahlen soll im Kontext dieser Aufgabe verzichtet werden.

Konstruieren Sie ausgehend von den in der Vorlesung vorgestellten Addierern für Zahlen in Binärdarstellung eine Addierstufe für eine Dezimalstelle in BCD-Codierung. Beachten Sie dabei, daß nur die oben angegebenen Codierungen zulässig sind. Sich durch einfache Binäraddition ergebende Bitmuster müssen daher ggf. noch berichtigt werden. Darüber hinaus soll sich die zu kontruierende Addierstufe genau wie bei den in der Vorlesung vorgestellten Binäraddierern mit Hilfe eines Carry-Bit kaskadieren lassen, um eine Addition mehrstelliger Zahlen in BCD-Code zu ermöglichen.

Aufgabe 26 (10 Bonus - Punkte)

Erweitern Sie die in Aufgabe 25 entwickelte Addierstufe um einen zusätlichen Eingang ($\text{ADD}/\overline{\text{SUB}}$), der es erlaubt, wahlweise die beiden Ziffern zu addieren ($\text{ADD}/\overline{\text{SUB}} = 1$) oder zu subtrahieren ($\text{ADD}/\overline{\text{SUB}} = 0$). Sorgen Sie dabei für eine korrekte Handhabung der Carry-Bits.

Abgabe: Bis Mi., 30.1.2002, 12 Uhr s.t. im Schrein (Institut für Informatik, Haus I, Erdgeschoß).

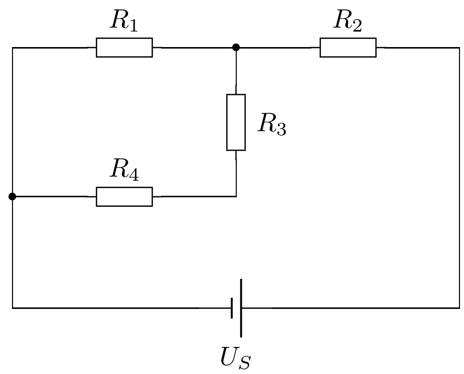
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel

Kiel, 30.01.2002

Übungen zu Digitale Systeme
WS 2001/2002
Serie 12 (freiwillig)

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Gegeben sei das folgende passive Widerstandnetz:

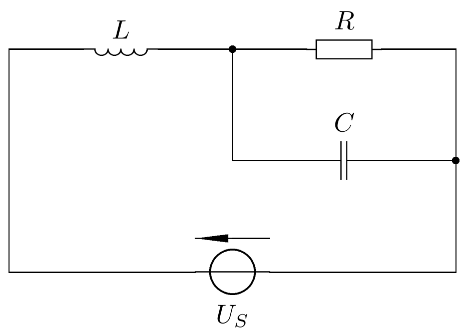


a) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand R.

b) Berechnen Sie die Spannung über R_1.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Gegeben sei das folgende passive Netzwerk:

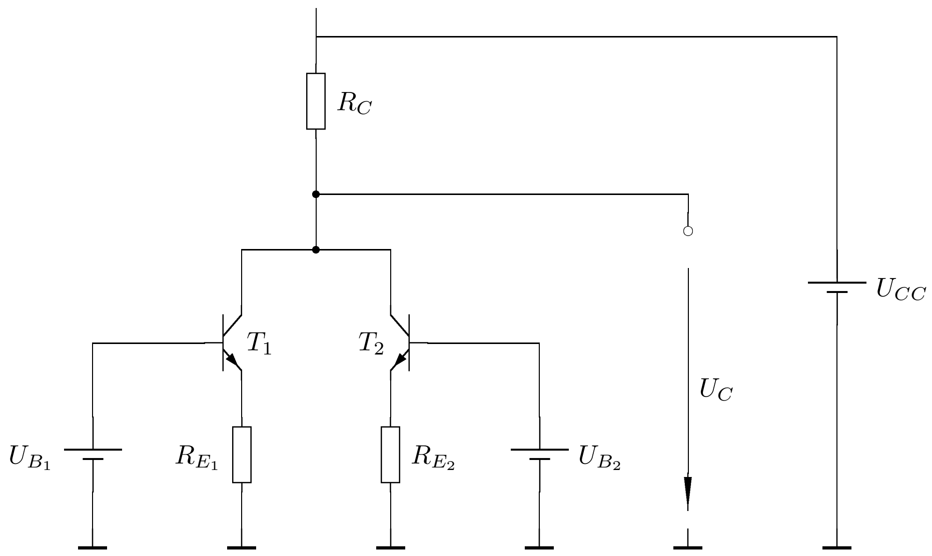


Die von der Spannungsquelle gelieferte Wechselspannung betrage $U_S = U_0 \cdot e^{j\omega t}$.

Berechnen Sie die Kreisfrequenz w, für die der Imaginärteil des komplexen Gesamtwiderstandes des Netzwerkes den Wert 0 annimmt.

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Gegeben sei die folgende Transistorschaltung:

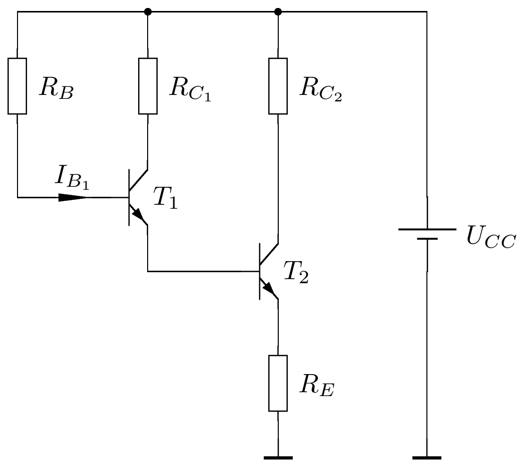


Die beiden Transistoren seien identisch und werden beide im Bereich der Vorwärtsverstärkung betrieben ($U_{BE} = 0.5\,\mathrm{V}$, $\beta_F \approx 100$). Für die Spannungen gelte: $U_{CC} = 5\,\mathrm{V}$, $U_{B_1} = 2.5\,\mathrm{V}$, $U_{B_2} = 1.5\,\mathrm{V}$. Die Widerstände seien wie folgt dimensioniert: $R_C = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{E_1} = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $R_{E_2} = 333\,\mathrm{k\Omega}$.

Berechnen Sie die Spannung U_C.

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Gegeben sei die folgende Transistorschaltung:



Die beiden Transistoren seien identisch und werden beide im Bereich der Vorwärtsverstärkung betrieben ($U_{BE} = 0.5\,\mathrm{V}$, $\beta_F \approx 100$). Die Betriebsspannung betrage $U_{CC} = 5\,\mathrm{V}$. Die Widerstände seien wie folgt dimensioniert: $R_B = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $R_{C_1} = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{C_2} = 75\,\Omega$, $R_E = 100\,\Omega$.

Berechnen Sie den Strom I_{B_1}.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Geben Sie die Schaltung eines XOR-Gatters (siehe nachfolgende Wertetabelle) als CMOS-Transistorschaltung an.

a	b	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Aufgabe 6 (0 Punkte)

Wandeln Sie die folgenden schaltalgebraischen Ausdrücke durch systematische Anwendung der in der Vorlesung vorgestellten Tautologien jeweils in konjunktive und disjunktive kanonische Form um:

a) $\neg(y \Rightarrow x) \Rightarrow z$

b) $z \wedge \neg(x \Leftrightarrow y)$

Aufgabe 7 (0 Punkte)

Gesucht sei ein Schaltnetz, das als Eingabe zwei 4-Bit-Muster $a \equiv a_3a_2a_1a_0$ und $b \equiv b_3b_2b_1b_0$ erhält, und das am Ausgang z genau dann eine 1 liefert, wenn die beiden Muster a und b gleich sind (ansonsten eine 0).

a) Geben Sie den Boole'schen Ausdruck der hierfür erforderlichen Schaltfunktion an.

b) Stellen Sie die Realisierung des Schaltnetzes graphisch dar.

Aufgabe 8 (0 Punkte)

Gesucht sei ein Schaltnetz, das als Eingabe ein 4-Bit-Muster $a \equiv a_3a_2a_1a_0$ sowie zwei Steuersignale l, r erhält und als Ausgabe ein 4-Bit-Muster $z \equiv z_3z_2z_1z_0$ liefert. Falls $(l, r) = (1, 0)$ ist, soll a am Ausgang um eine Stelle nach links rotiert bereitgestellt werden, d. h. $z = a_2a_1a_0a_3$. Falls $(l, r) = (0, 1)$ ist, soll a am Ausgang um eine Stelle nach rechts rotiert bereitgestellt werden, d. h. $z = a_0a_3a_2a_1$. In den beiden anderen Fällen $(l, r) = (0, 0)$ und $(l, r) = (1, 1)$ gelte $z = a$.

a) Geben Sie die Boole'schen Ausdrücke der hierfür erforderlichen Schaltfunktion an.

b) Stellen Sie die Realisierung des Schaltnetzes graphisch dar.