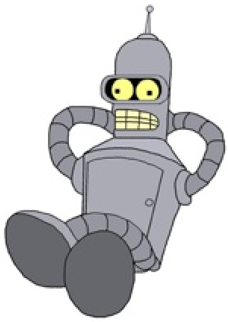
Analysis 1 & 2



„Take it easy!“

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Logik

1.1.1 logische Zeichen

- $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B; A impliziert B; wenn A, dann B)
- $A \Leftrightarrow B$ (aus A folgt B und aus B folgt A; A und B sind äquivalent/-gleichwertig; A gilt genau dann, wenn b gilt)
- $A :\Leftrightarrow B$ (A wird definiert durch B)
- $\exists n \in \mathbb{N} : n = \sqrt{2}$ bzw. $\exists_{n \in \mathbb{N}} n = \sqrt{2}$ (es existiert ein n aus $\mathbb{N}$, für das gilt: $n = \sqrt{2}$)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$ bzw. $\forall_{n \in \mathbb{N}} n > 0$ (für jedes n aus $\mathbb{N}$ gilt: $n > 0$)

1.1.2 logische Regeln

- $\neg(\exists a : b) \Leftrightarrow \forall a : \neg b$
- $\neg(\forall a : b) \Leftrightarrow \exists a : \neg b$

1.2 Mengen

1.2.1 Grundlagen

- Menge, Teilmenge, Element, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, leere/nichtleere Mengen, endliche/unendliche Mengen, Betrag/Mächtigkeit, disjunkte Teilmengen (keine gemeinsamen Elemente)
- *Endlichkeit*: M endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (\exists \alpha : \{1, 2, ..., n\} \mapsto M$ bijektiv).
- *Potenzmenge*: Menge aller Teilmengen
  - $\mathcal{P}(A) := \{U | U \subseteq M\}$
  - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

1.2.2 Bildung neuer Mengen

- Sei I eine *Indexmenge* und seien M_i, $i \in I$, Mengen
- *Vereinigung:* $\bigcup\limits_{i\in I} := \{x | x \in M_i \text{ für ein } i \in I\} = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$
- *Durchschnitt:* $\bigcap\limits_{i\in I} := \{x | x \in M_i \text{ für alle } i \in I\} = M_1 \cap M_2 \cap \ldots$
- *kartes. Produkt:* $\bigotimes\limits_{i\in I} := \{(x_1, \ldots, x_r) | x_i \in M_i, i \in I\} = M_1 \times M_2 \times \ldots$ (Für endliche Mengen $A_1, ..., A_2$ gilt: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$)
- *Differenz:* $M \setminus N := x | x \in M \wedge x \notin N$, eine Differenzmenge $M \setminus N$ heißt *Komplement* von N in M, falls $N \subseteq M$.
- Regeln von *de Morgan*:
  - Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
  - kurzfristige Sondernotation: $\overline{N} := M \setminus N$
  - $M \setminus \bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} N = \bigcup\limits_{N\in\mathcal{N}} (M \setminus N) \Leftrightarrow \overline{\bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} N} = \bigcup\limits_{N\in\mathcal{N}} \overline{N}$
  - $M \setminus \bigcup\limits_{N\in\mathcal{N}} N = \bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} (M \setminus N) \Leftrightarrow \overline{\bigcup\limits_{N\in\mathcal{N}} N} = \bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} \overline{N}$
  - $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

1.2.3 Partitionen/Klasseneinteilungen

Eine *Partition* (Klasseneinteilung) ist eine vollständige Aufteilung einer Menge in Teilmengen ohne Schnittmengen. Wenn für $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt: $\bigcup\limits_{N\in\mathcal{N}} N = M \wedge \bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} N = \emptyset$, so ist $\mathcal{N}$ eine Partition von M.

1.2.4 Permutation

Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Die Menge aller n-Tupel $(a_1, ..., a_n)$ mit $a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ (paarweise verschieden) hat genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... 3 \cdot 2 \cdot 1$ Elemente, also $\prod\limits_{i=0}^{n-1} (n-i) = \prod\limits_{x=1}^{n} x = n!$ Elemente.

1.2.5 Menge von Tupeln

Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Sei $1 \leq m \leq n$. Die Menge aller m-Tupel $(a_1, ..., a_m)$ mit $a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ (paarweise verschieden) hat genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ...(n-(m-1))$ Elemente, also $= \prod\limits_{x=n}^{n-(m-1))} x = \frac{n!}{(n-m)!}$ Elemente.

1.3 Relationen

Sei M eine Menge. Sei σ eine Relation auf M. Dann ist $\sigma \in M \times M$. Seien $x, y, z \in M$.

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität: $x \sigma x$
  - Symmetrie: $x \sigma y \Leftrightarrow y \sigma x$
  - Anti-Symmetrie: $x \sigma y \sigma x \Leftrightarrow x = y$
  - Transitivität: $x \sigma y \sigma z \Leftrightarrow x \sigma z$

RSAT Die *Gleichheit* ist eine Relation, die alle Eigenschaften erfüllt.

RST Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation* (z.B. $\backsim$).

RAT Eine Relation, die reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv ist, heißt *Ordnungsrelation* (z.B. $\leq, \geq, \subseteq$)

T Relationen können rein transitiv sein (z.B. $<, >, \subset$).

1.3.1 Eigenschaft von Äquivalenzrelationen

Definition einer Relation: $x \backsim y :\Leftrightarrow (x, y) \in A$ mit $A \subseteq M \times M$.
Die zugehörige Äquivalenzklasse: $\tilde{x} := \{y \in M | x \backsim y\}$.
Es gilt für alle $x, y \in M$:

(a) $x \in \tilde{x}$

(b) $M = \bigcup\limits_{z \in M} \tilde{z}$

(c) $a \backsim b$ für alle $a, b \in \tilde{x}$

(d) $\tilde{x} = \tilde{y} \lor \tilde{x} \cap \tilde{y} = \emptyset$

1.4 Abbildungen

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung φ von M in N ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu, welches *Bild* heißt. $x \in M$ ist ein *Urbild*. Mit $x\varphi$ wird das Bild bezeichnet. Die Zuordnungsvorschrift kann geschrieben werden als: $\varphi : x \mapsto x\varphi$. Sei $T \subseteq M$. $T\varphi := \{x\varphi | x \in T\}$. Spezialfall: $\emptyset\varphi = \emptyset$. $M\varphi$ heißt das $Bild\varphi$.

1.4.1 Spezielle Eigenschaften von Abbildungen

- φ heißt *injektiv*, falls gilt: Jedes Bild besitzt genau ein Urbild ($m, n \in M, m\varphi = n\varphi \Rightarrow m = n$).
- φ heißt *surjektiv*, falls gilt: Jedem Element der Menge N (in der die Bilder enthalten sind) ist mindestens einem Urbild zugeordnet ($Bild\varphi = \mathbb{N}$).
- φ heißt *bijektiv*, falls eine Abbildung injektiv und surjektiv ist.
- ○ Genau dann ist eine Abbildung $\varphi : A \mapsto B$ zwischen englichen Mengen A, B mit $|A| = |B|$ injektiv, wenn sie surjektiv sind.

1.5 Folgen

1.5.1 reelle Zahlenfolge

Eine unendliche Folge $x_1, x_2, ..., x_n$ von reellen Zahlen x_i wird z. B. bezeichnet als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder z. B. $(x_n)_{n \in 1,2,3,...}$.

2 Binomialkoeffizienten

2.1 Definition

Für ganze Zahlen $0 \leq m \leq n$ ist $\binom{n}{m} := |\mathcal{P}_m(A)|$ mit $|A| = n$ (Betrag der Menge aller m-Elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge).

2.2 Spezialfälle

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{n-1} = n$

2.3 Die binomische Formel

$(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} \left(\binom{n}{m} \cdot a^m \cdot b^{n-m}\right)$

Beispiel: $(a+b)^1 = (a+b)$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

informeller Beweis: Sei $n \geq 1$. Multipliziere das Produkt $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot ...(a+b)$ aus. Erhalte eine Summe von Produkten, wobei jedes Produkt n Faktoren besitzt: $a^m \cdot b^{n-m}$ von $m = 0$ bis $n = 0$. Wie oft das Produkt für ein festes m vorkommt, ist durch den Binomialkoeffizienten bestimmt - der Summand $a^m \cdot b^{n-m}$ komm so oft vor, wie ich unter den n Faktoren m auswählen kann.

2.4 Summe von Binomialkoeffizienten

$2^n = \sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m}$

2.5 gewöhnliche Definition von $\binom{n}{m}$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ Daraus folgt auch: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Unter einem *leeren Produkt* (Produkt mit 0 Faktoren) ist 1 zu verstehen.

Beweis:

- Sei A eine Menge mit $|A| = n$ Elementen. Sei T die Menge aller m-Tupel $(a_1, ..., a_m)$, wobei $a_i \in A$ und paarweise verschieden (also $|\{a_1, ..., a_m\}| = m$).
- Definiere eine Äquivalenzrelation $\backsim$ auf T durch $(a_1, ..., a_m) \backsim (b_1, ..., a_m) :\Leftrightarrow \{a_1, ..., a_m\} = \{b_1, ..., b_m\}$.
- Anzahl der Äquivalenzklassen: $\binom{n}{m}$.

- Jede Äquivalenzklasse hat genau $m!$ Elemente.
- Also (Klassengleichung) $|T| = \binom{n}{m} \cdot m!$.
- nach (siehe oben) ist $|T| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$.
- Daher: $|T| = \binom{n}{m} \cdot m! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$.

$\Rightarrow \binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

2.6 Addition von Binomialkoeffizienten

Behauptung: $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ gilt für beliebige $n \in \mathbb{R}$, wenn $\binom{n}{m}$ so definiert wird, wie in 2.5.

Beweis: is so, steht ellenlang an der Tafel

2.7 Das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

usw.

2.8 Die Bernoullische Ungleichung

$(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$

- Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt $(1+a)^n = 1 + na$.
- Für $a > 0$ und $n \geq 2$ folgt $(1+a)^n > 1 + na$ aus 2.3: $1 \cdot a^0 \cdot 1^n + n \cdot a^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot 1 + \binom{n}{3} \cdot a^3 \cdot 1 \ldots > 1 + na$.
- Beweis von $(1+a)^n > 1 + na$ für $n \geq 2$ und $a > -1, a \neq 0$ durch vollständige Induktion nach n.

  Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Zu zeigen bleibt: Wenn die Ungleichung für ein beliebiges n gilt, so muß die Ungleichung auch für $n-1$ gelten.

  $(1+a)^n = (1+a)^{n-1} \cdot (1+a) > (1+(n-1) \cdot a) \cdot (1+a) = 1 + na + (n-1) \cdot a^2 > 1 + na$.

3 Abbildungen

3.1 Definition, Schreibweise

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung φ von M in N ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu, welches *Bild* heißt und mit $x\varphi$ bezeichnet wird. $x \in M$ ist ein *Urbild*. Die Zuordnungsvorschrift kann geschrieben werden als: $\varphi : x \mapsto x\varphi$. $M\varphi$ heißt das *Bild*φ. Schreibweisen für Anwendungen: x^φ; $x\varphi$; x_φ; φ_x; φx oder $\varphi(x)$.
Die Gleichheit von Abbildungen α, β mit demselben Definitionsbereich M wird definiert durch: $\alpha = \beta :\Leftrightarrow \alpha x = \beta x \forall\, x \in M$.

3.2 Allgemeine kartesische Produkte

Sei M eine Menge. Für jedes $x \in M$ sei eine Menge A_x gegeben. Die Menge aller Abbildungen α auf M mit $\alpha x \in A_x \;\forall\, x \in M$ wird mit $\prod\limits_{x \in M} A_x$ bezeichnet und das kartesische Produkt der Mengen $A_x (x \in M)$ genannt.

3.3 Umkehrfunktionen

$f : M \to f(M) \Rightarrow f^{-1} : f(M) \to M$ (f^{-1} ist eine Abbildung zwischen Potenzmengen!)

3.4 die Funktionen der Schulmathematik

Winkelfunktionen (sin; cos; tan; cot)	Umkehrfunktionen von Winkelfunktionen (arcsin; arccos; arctan; arccot)
Exponentialfunktionen	Logarithmusfunktionen
Polynomfunktion	$\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i \cdot x^i)$
rationale Funktionen	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

4 Geordnete Mengen

- Sei M mit einer Menge, $\leq$ Ordnungsrelation auf M, dann ist M eine *geordnete Menge* (Hauptbeispiele: $M = \mathbb{R}$ mit $<$, $\mathcal{P}(A)$ mit $\subseteq$).
- Eine Menge ist *linear geordnet*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.
- Die geordnete Menge M ist *wohlgeordnet*, wenn für jede nichtleere Teilmenge T von M gilt: T hat ein Minimum (z.B. ist $\mathbb{R}$ nicht wohlgeordnet, da $(0, 1)$ kein Minimum hat).
- Zu jeder Ordnungsrelation gibt es eine duale Ordnungsrelation mit $x \leq^* y :\Rightarrow y \leq x$, und M^* mit $\leq^*$ ist die duale geordnete Menge zu M mit $\leq$.
- Aus der Wohlordnung einer Menge folgt, daß diese linear ist.
- Aus a ist Minimum folgt a ist ein minimales Element (siehe 4.1), für linear geordnete Mengen gilt die Folgerung auch für die Gegenrichtung

4.1 Definitionen

- Sei $X \subseteq M$.

$$\begin{aligned}
X_{<a} &:= \{x \in X | x < a\} \\
X_{\leq a} &:= \{x \in X | x \leq a\} \\
X_{\geq a} &:= \{x \in X | x \geq a\} \\
X_{>a} &:= \{x \in X | x > a\}
\end{aligned}$$

- das *Maximum:* jedes Element ist kleinergleich dem Maximum (Sei $a \in M$ das Maximum von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $a \geq x$).
- das *Minimum:* jedes Element ist größergleich dem Minimum (Sei $a \in M$ das Minimum von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $a \leq x$).
- ein *maximales Element:* es gibt kein größeres Element (Sei $a \in M$ ein maximales Element von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $x \geq a \Rightarrow x = a$).
- ein *minimales Element:* es gibt kein kleineres Element (Sei $a \in M$ ein minimales Element von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $x \leq a \Rightarrow x = a$).
- *obere Schranke:* alle Elemente sind kleiner gleich der oberen Schranke (Sei a eine obere Schranke. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \leq a$)

- *untere Schranke:* alle Elemente sind größer gleich der unteren Schranke (Sei a eine untere Schranke. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \geq a$)
- *obere Grenze/Supremum:* die kleinste obere Schranke (Sei a eine obere Grenze. Dann gilt für alle oberen Schranken s: $a \leq s$)
- *untere Grenze/Infimum:* die größte obere Schranke (Sei a eine untere Grenze. Dann gilt für alle unteren Schranken s: $a \geq s$)
- *von oben beschränkt:* Es existiert mindestens eine obere Schranke
- *von unten beschränkt:* Es existiert mindestens eine untere Schranke
- *Intervall:* X ist ein Intervall von M bedeutet: $x, y \in X, z \in M, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in X$

$$\begin{aligned} [u, v] &:= \{x \in X | u \leq x \leq v\} \\ (u, v] &:= \{x \in X | u < x \leq v\} \\ [u, v) &:= \{x \in X | u \leq x < v\} \\ (u, v) &:= \{x \in X | u < x < v\} \end{aligned}$$

- *unterer Abschnitt:* X ist ein unterer Abschnitt von M bedeutet: $x \in X, y \in M, y \leq x \Rightarrow y \in X$[1]
- *oberer Abschnitt:* X ist ein oberer Abschnitt von M bedeutet: $x \in X, y \in M, y \geq x \Rightarrow y \in X$

Beispiel $M = \mathcal{P}(A)$ mit $\subseteq$, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$.

- $\mathcal{A}$ hat die obere Grenze $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{A}} U$
- $\mathcal{A}$ hat die untere Grenze $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{A}} U$
- $\mathcal{P}$ hat das Minimum $\emptyset$
- $\mathcal{P}$ hat das Maximum A
- Für $\mathcal{A} := \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ hat $\mathcal{A}$ als minimale Elemente alle einelementigen Teilmengen
- Für $\mathcal{A} := \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$ hat $\mathcal{A}$ als maximale Elemente alle $(|A| - 1)$-elementigen Teilmengen

[1] „Schade, daß ich hier keinen Stock habe... Moment, was ist denn das hier? Eine Antenne? Wozu braucht man hier eine Antenne? **zupf**“

4.2 Vollständigkeit

Die Eigenschaften (a) und (b) der geordneten Menge M sind äquivalent:

(a) Jede von oben beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine obere Grenze

(b) Jede von unten beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine untere Grenze

Erfüllt die Menge M die Eigenschaften (a) und (b), so heißt die *vollständig* (z. B. $\mathbb{R}$ ist vollständig).

4.2.1 Beispiel zur Vollständigkeit

Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Nein, z.B. die Menge $\{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\}$: die obere Grenze in $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2}$.[2] Nehme man nun an, g sei eine obere Grenze in $\mathbb{Q}$ selbst. Dann findet man bei $g > \sqrt{2}$ immer noch eine rationale Zahl zwischen g und $\sqrt{2}$, damit ist g nicht die kleinste Schranke. Wenn $g < \sqrt{2}$ ist, so gibt es noch eine Zahl dazwischen, damit ist g gar keine Schranke.

4.3 Morphismen

Seien $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ zwei Gruppen. Seien $g_1, g_2 \in G$. Sei f eine Abbildung mit $f : G \to H$. Diese Abbildung f heißt...

- ... *Homomorphismus*, falls $f(g_1 \circ_G g_2) = f(g_1) \circ_H f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.
- ... *Monomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und injektiv ist.
- ... *Epimorphismus*, falls f ein Homomorphismus und surjektiv ist.
- ... *Isomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und bijektiv ist.
- ... *Automorphismus*, falls f ein Isomorphismus und $G = H$ ist.

Bezogen auf geordnete Mengen gilt:

- ... *Homomorphismus*, falls $g_1 \leq g_2 \Rightarrow fg_1 \leq fg_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.
- ... *Monomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und injektiv ist.
- ... *Epimorphismus*, falls f ein Homomorphismus und surjektiv ist.
- f ist *Isomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und bijektiv ist.

[2] „Hinreichend für die Erlangung des Übungsscheines ist die erfolgreiche Bearbeitung von 99% der Aufgaben. Notwendig ist die erfolgreiche Bearbeitung von 1% der Aufgaben.“

- ... *Automorphismus*, falls f ein Isomorphismus und $G = H$ ist.
- ... *Anti-Isomorphismus*, falls $g_1 \leq g_2 \Rightarrow fg_1 \geq fg_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt mit bijektivem f.

Schreibweise: $H \backsimeq G :\Leftrightarrow H$ ist isomorph zu $G :\Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus $f : G \to H$.

5 Geordnete Gruppen

5.1 Definitionen

5.1.1 Halbgruppe

Eine Halbgruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$ mit multiplikativer oder additiver Notation ($(x, y) \to xy$ oder $(x, y) \to x + y$), wenn folgendes gilt:

1. $(ab)c = a(bc) \; \forall \; a, b, c \in G$
2. die Halbgruppen, die in der Mathematik interessant sind, haben auch alle ein Einselement

5.1.2 Gruppe

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$ mit multiplikativer oder additiver Notation ($(x, y) \to xy$ oder $(x, y) \to x + y$), wenn folgendes gilt:

1. $(ab)c = a(bc) \; \forall \; a, b, c \in G$
2. $\exists \; e \in G$ mit $ex = x = xe$ (*Anmerkung: es gibt nur ein solches „Einselement", schreibe 1 für e*)
3. $\forall \; a \in G \; \exists \; b \in G \; : \; ab = ba = 1$ (*Anmerkung: zu jedem a gibt es nur ein einziges „Inverses" b, schreibe a^{-1} für b*)[3]

Bemerkungen:

1. $ab = 1 \Rightarrow b = a^{-1} \Rightarrow a = b^{-1}$
2. $(a^{-1})^{-1} = a$
3. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ („a und b töten sich gegenseitig")
4. $\forall \; a \in G \; : \; x \mapsto xa$ ist bijektiv

5.1.3 abelsche Gruppe

Eine Gruppe heißt *kommutativ* bzw. *abelsch*, falls $\forall \; a, b \in G \; : \; ab = ba$ gilt. Dann wird die Gruppe additiv notiert (mit Nullelement statt Einselement) mit $(x, y) \mapsto x + y$ und $a + (-a) = 0$; zusätzliche Notation: $a - b := a + (-b)$.

[3] „Ansonsten sind Vorlesungen nur dafür da, weil sonst kein Politiker dazu bereit wäre, für uns Geld zu bezahlen."

5.1.4 Potenzen in multiplikativer Notation

Sei G eine Gruppe[4], $a \in G, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a^n := a \cdot a \cdot ... \cdot a$ bzw. bei $n = 0$ ist $a^0 := 1$. Es gelten die „normalen“ Regeln der Potenzrechnung:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $a^{(nm)} = (a^n)^m$
- $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$
- $(ab)^n = a^n \dot{b}^n$ bei abelschen Gruppen

5.1.5 Vielfache in additiver Notation

Sei G eine Gruppe, $a \in G, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n \cdot a := a + a + ... + a$ bzw. bei $n = 0$ ist $0 \cdot a := 0$. Es gelten die „normalen“ Regeln:

- $(n + m)a = na + ma$
- $(nm)a = n(ma)$
- $-(na) = n(-a) = (-n)a$
- $n(a + b) = na + nb$ bei abelschen Gruppen

5.1.6 geordnete Gruppe

Eine geordnete Gruppe ist eine abelsche Gruppe G, auf der zusätzlich eine lineare Ordnungsrelation $\leqq$ definiert ist[5], derart daß $x \leqq y \Leftrightarrow x + a \leqq y + a$ für alle $x, y, a \in G$ gilt (*gilt auch mit* $\Rightarrow$ *statt* $\Leftrightarrow$ *oder mit* $<$ *statt* $\leqq$). Für die Ordnungsrelation werden *positiv* und *negativ* als Bezeichnungen übernommen (größer bzw. kleiner als das neutrale Element).

Regeln in additiver Notation:

1. $x \leqq y \wedge x' \leqq y' \Rightarrow x + x' \leqq y + y'$
2. $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$
3. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
4. $x < y \Leftrightarrow -x > -y$

[4]„Potenzen... so wie im zweiten Schuljahr!“

[5]„Leute die alles ganz besonders präzise haben wollen, ... ja, das kann leicht zu Sadismus ausarten...“

Regeln in multiplikativer Notation:

1. $x \leqq y \wedge x' \leqq y' \Rightarrow xx' \leqq yy'$
2. $x < y \Leftrightarrow yx^{-1} > 1$
3. $x < 1 \Leftrightarrow x > 1$
4. $x < y \Leftrightarrow x^{-1} > y^{-1}$

5.2 Sätze zum Supremum und Infimum

5.2.1 (Anti)-Automorphismen und deren Supremum/Infimum

Die Abbildung $\alpha : G \to G$ mit $\alpha : x \mapsto x + a$ ist ein Automorphismus der geordneten Menge G, für jede Teilmenge $X \subseteq G$ und jedes Element $a \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} sup(\{x + a \mid x \in X\}) &= sup(X) + a \\ inf(\{x + a \mid x \in X\}) &= inf(X) + a \end{aligned}$$

Die Abbildung $\beta : G \to G$ mit $\alpha : x \mapsto -x$ ist ein Anti-Automorphismus der geordneten Menge G, für jede Teilmenge $X \subseteq G$ gilt:

$$\begin{aligned} sup(\{-x \mid x \in X\}) &= -sup(X) \\ inf(\{-x \mid x \in X\}) &= -inf(X) \end{aligned}$$

5.2.2 gemeinsames Supremum zweier Teilmengen

Voraussetzung: $A, B \subseteq G$. $\alpha = sup(A); \beta = sup(B)$. Behauptung: $\alpha + \beta = sup(\{a + b \mid a \in A, b \in B\})$. Zu zeigen:

1. $\alpha + \beta \geq a + b \,\forall\, a \in A, b \in B$
2. $u \in G, u \geq a + b \,\forall\, a \in A, b \in B \Rightarrow \alpha + \beta \leq u$

Beweis:

1. $a \leq \alpha; b \leq \beta$ nach Voraussetzung für alle a, b; mit den oben genannnten Eigenschaften gilt: $a + b \leq \alpha + \beta$.
2. Für alle $a \in A, b \in B$ gilt: $u - a \geq b$. Das heißt $u - a$ ist eine obere Schranke von B. Damit ist $u \geq a + \beta$. Daraus folgt: $u - \beta \geq a$. Da dies für alle $a \in A$ gilt, gilt es auch für das Supremum: $u \geq \alpha + \beta$.

5.2.3 gemeinsames Supremum mehrer Mengen

Voraussetzung: Sei $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ Indexmenge mit n Elementen, sei $A_i \subseteq G \; \forall \; i \in I$ mit $\alpha_i = sup(A_i) \; \forall \; i \in I$. Behauptung: $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = sup\left(\sum\limits_{i \in I} A_i\right)$. (und genauso für das Infimum) Beweis:

- Für $n = 1$ trivial; für $n = 2$ gilt es nach 5.2.2.
- durch vollständige Induktion *(steht sehr wirr und klein an der Tafel, ist relativ trivial)*

5.2.4 Supremum eines Produkts

Voraussetzung: $A \subseteq G$, $\alpha = sup(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: $n \cdot \alpha = sup(\{n \cdot x \mid x \in A\})$. Beweis: Setzte $A' = \{n \cdot x \mid x \in A\}$. Wende 5.2.3 an mit $A_1 = A_2 = ... = A_n$. Dann ist $n\alpha = sup(A_1 + A_2 + ... + A_n) = sup(U)$. Damit genügt es zu zeigen, daß U und A' die gleichen oberen Schranken haben. Betrachte dazu:

1. $A' \subseteq U$
2. $\forall \; u \in U \; \exists \; s \in A'$ mit $u \leq s$

zu (2): $u = a_1 + a_2 + ... + a_n$. O.B.d.A. ist $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Setze $s = n \cdot a_n$. Dann gilt: $s \geq u$.

5.3 archimedische Ordnung

Sei $a > 0$. Dann ist $0 < a < 2a < 3a$. G heißt *archimedisch geordnet* genau dann, wenn $\forall \; a > 0$ gilt: die Teilmenge $\mathbb{N}a := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nicht* von oben beschränkt (und $\mathbb{N}(-a)$ ist nicht von unten beschänkt).

5.3.1 hinreichende Bedingung für archimedische Ordnung

Satz: Aus der Vollständigkeit von G folgt: G ist archimedisch. Beweis durch Widerspruch: Annahme: G sei nicht archimedisch. Dann existiert $a > 0$, derart daß $\mathbb{N}a$ von oben beschränkt ist. Dann existiert ein kleinste obere Schranke $g = sup(\mathbb{N}a)$ (nach der Vollständigkeit). Wegen $a > 0$ ist $g - a < g$ und $g - a$ nicht mehr obere Schranke. Es exitiert also ein Element $na \in \mathbb{N}a$ mit $na > g - a$. Daraus folgt $na + a > g \Rightarrow (n + 1)a > g$. Da aber $(n + 1)$ auch eine natürliche Zahl ist, kann $(n + 1)a$ nicht gröser als die obere Grenze g sein. Das fürt zu einem Widerspruch , also ist G archimedisch!

6 Geordnete Körper

6.1 Definition des Ringes

Ein *Ring* ist eine (additiv geschreibene) abelsche Gruppe A zusammen mit einer Multiplikation $A \times A \rightarrow A$ derart daß für alle $a, b, c \in A$ gilt:

- $(ab)c = a(bc)$
- $a(b + c) = ab + ac$ [6]
- $(b + c)a = ba + ca$

Bemerkungen:

- Ein Ring heißt kommutativ, wenn die Multiplikation kommutativ ist.
- Bezüglich der Multplikation ist ein Ring u.a. deswegen keine Gruppe, da es bei der Multiplikation nicht unbedingt inverse Elemente gibt!
- $a(-b) = -ab = -a(b)$ (Beweis für den ersten Teil: $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$)

6.1.1 Beispiele

- $\mathbb{Z}$
- Menge aller Funktionen von der Menge M in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$) mit $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$; $f \cdot g : x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$

  (Nullelement (Neutrales der Addition): $x \rightarrow 0$; $-f : x \rightarrow -f(x)$; Einselement (Neutrales der Multiplikation): $x \rightarrow 1$, kommutativ)
- Menge aller Funktionen von der Menge M in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$) mit $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$; $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$ (Nullelement (Neutrales der Addition): $x \rightarrow 0$; $-f : x \rightarrow -f(x)$; Einselement (Neutrales der Multiplikation): $id_{\mathbb{R}}$, nicht kommutativ)
- $A := \{0\}$ ist ein Ring!

[6] Konvention: Punkt- vor Strichrechnung

6.2 Definition des Körpers

Ein *Körper* ist ein *kommutativer* Ring K mit Einselement $1 \neq 0$, derart daß jedes Element $a \neq 0$ von K ein multiplikatives Inverses a^{-1} hat. Bemerkungen:

- Für $a \neq 0 \neq b$ ist auch $ab \neq 0$.
- $a0 = a(0+0) = a0 + a0 = 0$ und $0a = 0$
- Bezeichnung: $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für alle $b \neq 0$ mit „normalen "Regeln der Bruchrechnung
- Charakteristik eine Körpers siehe Lineare Algebra
- Interessant: Körper der rellen, komplexen und rationalen Zahlen, andere Fälle eher uninteressant

6.3 Definition des geordneten Körpers

Ein geordneter Körper ist ein Körper K zusammen mit einer linearen Ordnungsrelation $\leq$ derart daß für alle $x, y \in K$ gilt:

- $x \leq y \Leftrightarrow x+a \leq y+a$ (d.h. bezüglich der Addition ist K eine geordenete Gruppe)
- $x \leq y \Leftrightarrow xa \leq ya$ für positive a

Bemerkungen/Regeln:

- $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ (echt kleiner)
- $x < y \Leftrightarrow xa < ya$ (echt kleiner) für positive a
- a positiv $:\Leftrightarrow a > 0$
- a negativ $:\Leftrightarrow a < 0$
- $ab > 0$ für positive a, b
- $ab < 0$ für negative a, b
- $ab < 0$ für ein negatives und eine positives Element
- a^2 ist positiv
- das Einselement ist positiv

- a positiv $\Rightarrow a^{-1}$ positiv
- a negativ $\Rightarrow a^{-1}$ negativ
- Die Menge $K_{>0}$ der positiven Elemente von K ist bezüglich der Multiplikation eine geordnete Gruppe.

6.4 Definition: archimedischer Körper

Ein Körper K heiße archimedisch genau dann, wenn K^+ (d.h. die geordnete Gruppe bezüglich der Addition) archimedisch ist; d.h. für jedes positive Element $a \in K^+$ hat die Menge $\mathbb{N}a := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine obere Schranke.

- Die Folge $a, 2a, 3a, ...$ ist streng monoton wachsend (d.h. $a < 2a < 3a < 4a < ...$)
- Hinreichend für K archimedisch ist, die Bedingung für $a = 1$ zu zeigen.

6.4.1 weitere Sätze zur Vollständigkeit

Sei K ein vollständiger Körper. Aus der Vollständigkeit von K folgt: K_0 ist vollständig und K^+ und $K_{>0}$ sind archimedisch. Ist K vollständig, so ist für jedes $a > 1$ die Folge $a, a^2, a^3, a^4, ...$ von oben unbeschränkt (und $a < a^2 < a^3 < a^4$). Die Folge $a^{-1} > a^{-2} > a^{-3} > ...$ ist für jedes $a > 1$ nach unten unbeschränkt in $K_{>0}$, d.h. $0 = \inf\{a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...\}$.

7 Eigenschaften des Systems $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist ein vollständig angeordneter Körper

- $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

7.1 Sätze zur Ordnungsrelation

1. $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ (bzw. $\leq$)
2. $x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow x + a \leq y + b$ (z.T. auch $<$)
3. $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$
4. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
5. $x < y \Leftrightarrow -x > -y$
6. $x < y \Leftrightarrow xa < ya$ (für positive a)
7. $x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow xa \leq yb$ (für positive a, b)
8. $x < y \Leftrightarrow \frac{y}{x} > 1$
9. $x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$
10. $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Bezeichnung: Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{P} := \mathbb{R}_{>0}$

7.2 „Vererbung“ von Grenzen/Schranken

Aus den oben genannten Eigenschaften folgt: Für Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}$ oder $X \subseteq \mathbb{P}$ gilt:

- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn $-b$ untere Schranke/untere Grenze von $-X$ ist.
- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn b^{-1} untere Schranke/untere Grenze von X^{-1} ist für $b > 0$

- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn $b + a$ obere Schranke/obere Grenze von $X + a$ ist für $a, b > 0$.
- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn ba obere Schranke/obere Grenze von Xa ist für $a, b > 0$

7.3 Archimedes etc.

- Für jedes $x > 0$ ist die Folge $1x, 2x, 3x, 4x, ...$ streng monoton wachsend und von oben unbeschränkt.
- Für jedes $x > 1$ ist die Folge $x^1, x^2, x^3, x^4, ...$ streng monoton wachsend und von oben unbeschränkt.
- Ist $x_1, x_2, x_3, ...$ irgendeine (streng) monoton wachsende Folge positiver Zahlen. Dann ist die Folge der Kehrwerte (streng) monoton fallend.
- Ist die (streng) monoton wachsende Folge positiver Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$ unbeschränkt, so ist die Folge der Kehrwerte in $\mathbb{P}$ von unten unbeschränkt; aber 0 ist das Infimum der Folge der Kehrwerte.
- Die Zahl 0 ist Infimum der Menge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen ($\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$)
- Zu jeder positiven Zahl ε existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

7.4 Definition von dicht

Zu reelen Zahlen $x < y$ existiert eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$. $\mathbb{Q}$ heißt damit *dicht* in $\mathbb{R}$.

Beweis: Wegen $y - x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(y - x) > 1$. Also existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $nx < m < ny$. Damit folgt: $x < \frac{m}{n} < y$. Somit gibt es eine rationale Zahl zwischen beliebigen x und y.

Folgerung: Für jede reelle Zahl[7] $u \in \mathbb{R}$ ist $u = \sup \mathbb{Q}_{<u}$ und $u = \inf \mathbb{Q}_{>u}$.

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ mit $f : x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis:

1. streng monoton wachsend: Sei $0 < x < y$. Dann ist $x^n < y^n$.

[7] „Das $\mathbb{R}$ gibt es nur einmal, das ist so eine Art Naturkonstante, das hat der liebe Gott so gewollt. Und dann hat der Mensch auch die Verpflichtung, sich damit zu beschäftigen.“

2. Vorbermerkung: Für $X \subseteq \mathbb{P}$ und $b = \sup(X)$ bzw. $b = \inf(X)$ gilt: $b^n = \sup(X^n)$ bzw. $b^n = \inf(X^n)$

   surjektiv: Sei jetzt $u \in \mathbb{P}$. Gesucht: $w \in \mathbb{P}$ mit $w^n = u$. Wir dürfen $u > 1$ annehmen (da $u < 1 \Rightarrow \frac{1}{u} > 1$). Setze $X := \{x \geq 1 | x^n \leq u\}$. Die Menge ist nicht leer ($1 \in X$) und von oben beschränkt ($x \leq x^n \leq u$), damit kann die Vollständigkeit verwendet werden.

   Damit hat X eine obere Grenze w. $w^n = sup(X^n) \leq u$. Annahme: $w^n < u$. Betrachte $a > 1$; $w < wa = \sup Xa$ Dann existiert ein $x \in X$ mit $xa \notin X$. Also ist $(xa)^n > u$. Damit ist $a^n > \frac{u}{x^n} > \frac{u}{w^n} > 1$. Also existiert ein $g > 1$ mit $a^n > g$ für alle $a > 1$.

7.5 Potenzen mit rellen Exponenten

zunächst rationale Exponenten: Für $q = \frac{m}{n}$ und $a > 0$ setze $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$. Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ und $a, b > 0$ gilt: $a^{p+q} = a^p a^q$; $a^{pq} = (a^p)^q$; $(ab)^q = a^q b^q$. Problem: Uneindeutigkeit der Darstellung von rationalen Zahlen ($q = \frac{m}{n} = \frac{xm}{xn}$)

Erweiterung zu reelen Exponenten: Gesucht ist eine Definition von a^x für $x \in \mathbb{R}$. Für alle diese x ist $x = \sup \mathbb{Q}_{<x}$ und $x = \inf \mathbb{Q}_{>x}$. Zudem gilt: $\sup\{a^q | q < x\} \leq \inf\{a^q | q > x\}$. Es gilt sogar die Gleichheit, setze dann $a^x = \sup\{a^q | q < x\} = \inf\{a^q | q > x\}$.

8 Konvergenz reeller Zahlenfolgen

8.1 der Betrag einer reellen Zahl, Dreiecksungleichung

Der Betrag einer reelen Zahl: $|a| = a$ für $a \geq 0$, $|a| = -a$ für $a < 0$. Klar: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|ab| = |a|\,|b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Dreiecksungleichung: $|a + b| = |a - b| \leq |a| + |b|$; Beweis: Fallunterscheidung:

- bei $a, b \geq 0$ gilt: $|a + b| = a + b = |a| + |b|$
- bei $a, b \leq 0$ gilt: $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| = |b|$
- bei $a < 0$ und $b > 0$ und $a+b \leq 0$ gilt: $|a + b| = a+b \leq a+b+(-2b) = a + (-b) = |a| + |b|$
- bei $a < 0$ und $b > 0$ und $a + b > 0$ gilt: $|a + b| = -(a + b) \leq -(a + b) + (2a) = a + (-b) = |a| + |b|$
- analog für $b < 0$ und $a > 0$

8.2 Induktive Definition einer Folge

Eine Folge[8] $x_1, x_2, x_3, ...$ ist definiert durch:

1. gebe x_1 an (etwa $x_1 = 5$)
2. gebe an, wie ich x_{n+1} aus x_n erhalte (etwa durch $x_{n+1} = 2x_n - 1$)

bzw. allgemeiner:

1. gebe x_1 bis x_k an
2. gebe an, wie ich x_{n+k+1} aus x_n bis x_{n+k} erhalte

Sie wird notiert als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beispiel: Fibonaccifolgen: Vorgegeben seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Die Fibonaccifolge ist definiert für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$ definiert als $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ (bedeutend z.B. in der Linearen Algebra als Vektorraum)

[8] Folge bedeutet immer *unendliche Folge*

8.3 Beschränktheit

- Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn gilt: $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b\ \forall\ x \in X$. Dies ist äquivalent zu: $\exists\ c > 0$ mit $|x| \leq c\ \forall\ x \in X$. Dies ist äquivalent zu: $\exists\ c > 0$ und $u \in \mathbb{R}$ mit $|u - x| \leq c\ \forall\ x \in X$.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn $f(D)$ beschränkt ist.

- Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt genau dann, wenn $\{x_n | b \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

- Bemerkung: Die Vereinigung von endlich[9] vielen beschränkten Teilmengen ($\subseteq \mathbb{R}$) ist beschränkt.

8.4 ε-Umgebung

Zahlen, die von einer Konstante a maximal den Abstand a haben, liegen in $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$. Sei (x_n) eine streng monoton steigende und beschränkte reelle Folge. Setze $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \varepsilon\ \forall\ n \geq m$. (analog mit fallend).

8.5 Limes

a heißt *Limes* von (x_n) genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a - x_n| < \varepsilon\ \forall\ n \geq m$. Schreibe $\lim_{n\to\infty} x_n$ (kurz: $\lim x_n$ oder $x_n \to a$.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = a \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m\ \forall n \geq m : |a - x_n| < \varepsilon$$

Satz: Es gibt höchstens ein a. Beweis: Seien a, b Grenzwerte der Folge (x_n) und $a < b$. Setze $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Dann existiert ein n, so daß $|a - x_n| < \varepsilon$ und $|b - x_n| < \varepsilon$. Damit erhalten wir: $b - a = |b - a| = |(b - x_n) - (a - x_n)| \leq |b - x_n| + |a - x_n| < 2\varepsilon = b - a$, also $b - a < b - a$. Damit gibt es nur einen Grenzwert.

Beispiele:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

Eine Folge heißt *konvergent*, wenn für sie ein Limes existiert.

[9] nach einem Hinweis auf einen Fehler an der Tafel: „Wenn ich Sie in der Mensa treffe, geb' ich Ihnen ein Bier aus!“ (Gibt's in der Mensa Bier?!)

8.6 Beschränktheit konvergierender Folgen

Eine konvergente Folge ist beschränkt: Sei (x_n) eine Folge. Sei $a = \lim x_n$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < 1 \; \forall \; n \geq m$. Also ist $\{x_n \mid n \geq m\}$ beschränkt.

8.7 Nullfolge

Eine Folg eheißt Nullfolge, wenn ihr Limes gleich 0 ist. Das bedeutet, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Also gilt: $a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow (a - x_n)$ ist eine Nullfolge.

8.7.1 Rechenregeln

1. Sind (x_n) und (y_n) Nullfolgen, so ist auch $(x_n + y_n)$ eine Nullfolge.

2. Ist (x_n) eine Nullfolge und (y_n) beschränkt, so ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

BEWEIS:

1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$ und ein $m' \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m'$. Sei $m_{max} = max(m, m')$ Es folgt: $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq 2\varepsilon \; \forall \; n \geq m_{max}$.

   Anmerkung: Ob der Beweis für ε oder $x\varepsilon$ mit $x > 0$ gezeigt wird, ist egal. Im Zweifelsfall wird m bzw. m' so gewählt, daß $|x_n|$ für alle $n \geq m$ kleinergleich $\frac{\varepsilon}{x}$ ist.

2. Es existiert ein $c > 0$ mit $|y_n| < c$ für alle n. Sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Es folgt: $|x_n y_n| = |x_n| \, |y_n| \leq c\varepsilon \; \forall \; n \geq m$.

8.8 Limes von mehreren konvergenten Folgen

VORAUSSETZUNG: Sei $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$.

BEHAUPTUNG:

1. $a + b = \lim x_n + y_n$

2. $ab = \lim x_n y_n$

3. $a^q = \lim x_n^q$ für alle $q \in \mathbb{N}$

BEWEIS:

1. zu zeigen: $((a+b)-(x_n+y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. $z_n = (a+b) - (x_n+y_n) = (a-x_n)+(b-y_n)$. Wie eben gezeigt, ist z_n als Summe zweier Nullfolgen ebenfalls eine Nullfolge.

2. zu zeigen: $((a-x_n)(b-y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. $z_n = (ab - ay_n - bx_n + x_ny_n = ab - x_ny_n + (x_n-a)y_n + (y_n-b)x_n$. Die beiden hinteren Summanden sind Nullfolgen. Die Folge $(ab - x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, d.h. $\lim x_ny_n = ab$.

3. zurückzuführen auf das Produkt von Folgen

8.9 Uneigentliche Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n \to +\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\, \exists\, m \in \mathbb{R} : x_n > u\, \forall\, n \geq m$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\, \exists\, m \in \mathbb{R} : x_n < u\, \forall\, n \geq m$$

Regeln:

- Ist $\lim x_n = \infty$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch $\lim x_n + y_n = \infty$.
- Ist $\lim x_n = \infty$ und existiert ein $c > 0$ mit $|y_n| > c\ \forall\ n$, so ist auch $\lim x_n + y_n = \infty$.
- Wenn $x_n \neq 0\ \forall\ n$ und $a \neq 0$, gilt: $\frac{1}{a} = \lim \frac{1}{x_n}$ bei $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.
- $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = \infty$ und $\lim x_n = \infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = 0$

zu den letzten beiden Sätzen:

- Es gilt: $\frac{1}{a} - \frac{1}{x_n} = (x_n - a) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x_n}$. Da $(x_n - a)$ eine Nullfolge ist, reicht es zu zeigen, daß $\frac{1}{x_n}$ beschränkt ist (wie oben gezeigt). Sei etwa $a > 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $s := a - \varepsilon > 0$ Für alle bis auf endlich viele x_n gilt: $s \leq x_n \leq Z$. D.h. $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{Z}$ (nur mit Zeichnung logisch, aber offensichtlich)
- Setze $\varepsilon := \frac{1}{u} > 0$. Dann existiert ein m mit $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Also $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = u$.

8.10 wichtige Folgen

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$ für jedes rationale $q > 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes $a > 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ für alle a mit $|a| < 1$
5. $\lim_{n\to\infty} = \frac{n^k}{a^n} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und a mit $|a| \geq 1$.[10]

Beweis:

1. Es genügt zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} n^q = \infty$. Die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^q$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt. Also Die Folge $(n^q)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt.
2. Die Folge ist für $a > 1$ streng monton fallend.

   Beweis: $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n+1]{a}$. Daraus folgt: $(\sqrt[n]{a})^{n+1} \leq (\sqrt[n+1]{a})^{n+1} \Rightarrow a \cdot \sqrt[n]{a} \leq a \Rightarrow \sqrt[n]{a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$.

   Es bleibt für $a > 1$ zu zeigen: 1 ist untere Grenze. Annahme: $\exists b > 1$ mit $b \leq \sqrt[n]{a}\ \forall\ n$. Es folgt: $b^n \leq a\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, Widerspruch! Der Fall $a = 1$ ist trivial, der Fall $a < 1$ ist analog mit $\frac{1}{a}$.
3. zwei Beweise:

   (a) Zeige genauer: Die Folge ist ab $n = 3$ streng monoton fallend und 1 ist untere Grenze.

   (b) Setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1\ \forall\ n$ $(x_n > n\ \forall\ n \geq 2)$. Zu zeigen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

[10] „Mich interessiert an der Mathematik nicht, wo man sie anwendet, sondern nur der Spaß, den man damit hat!"

eine Nullfolge.

$$\begin{aligned}
n &= (\sqrt[n]{n})^n \\
&= (1+x_n)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_n^i \\
&> 1 + \binom{n}{2} x_n^2 \\
n-1 &> \left(\frac{1}{2}n(n-1)\right) x_n^2 \\
1 &> \frac{nx_n^2}{2} \\
x &< \sqrt{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

Die Folge $\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend mit unterer Grenze 0. Also ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Das heißt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \sqrt{\frac{2}{m}} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq m : x_n < \varepsilon$$

4. Für $a \neq 0$ ist die Folge $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}} = (|a^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend mit unterer Grenze 0.

5. Es darf $a > 1$ angenommen werden. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} = \frac{a^n}{n^k} = \infty$. Setze $b = a - 1 > 0$. Für $n > 2k$ gilt: $n - k > \frac{1}{2}n$ und daher

$$\begin{aligned}
a^n &= (1+b)^n \\
&> \binom{n}{k+1} b \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k)}{(k+1)!} b^{k+1} \\
&\geq (\frac{n}{2})^{k+1} \cdot \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} \\
\frac{a^n}{n^k} &> n \left(\frac{b^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \right) \\
c &:= \frac{b^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \\
\frac{a^n}{n^k} &> nc
\end{aligned}$$

Sei nun $u > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 2k$ und $mc > u$ (Archimedes!). Für alle $n \geq m$ ist dann $\frac{a^n}{n^k} > nc \geq mc > u$.

8.11

Sei $a = \lim x_n, b \in \mathbb{R}$. Es gilt:

1. $x_n \leq b \,\forall\, n \Rightarrow a \leq b$.
2. $x_n \geq b \,\forall\, n \Rightarrow a \geq b$
3. $b = \lim y_n, x_n \leq y_n \,\forall\, n \Rightarrow a \leq b$

Es genügt zu zeigen: Es gilt für fast alle (d.h. für alle bis auf endlich viele).

8.12 Einquetschungssatz

Sei $a = \lim x_n = lim z_n$ und außerdem $x_n \leq y_n \leq z_n \,\forall\, n$. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes a.

8.13 Beispiele

- Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2n+1}{3-5n}$ - existiert ein Grenzwert für $n \to \infty$? Zerlegung: $\frac{2n}{3-5n} + \frac{1}{3-5n}$, der hintere Summand geht gegen 0, für den vorderen Summanden betrachte die inverse Folge $\frac{3-5n}{2n}$. Diese wird wieder zerlegt in $\frac{3}{2n} - \frac{5n}{2n}$. Der vordere Summand geht gegen null, der hintere gegen $-\frac{5}{2}$, die ganze Folge daher gegen den Kehrwert, also gegen $-\frac{2}{5}$.

- Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b} - n$. Betrachten wir $\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+an+b}-n)(\sqrt{n^2+an+b}+n) = a+\frac{b}{n}$. Es folgt: $\sqrt{n^2+an+b}-n = (\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1)^{-1} \cdot (a+\frac{b}{n})$. Der hintere Faktor geht geben a, der vordere gegen 2^{-1}, das Produkt also gegen $\frac{a}{2}$.

- Ein wichtiges Beispiel: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent, der Grenzwert ist kleinergleich 3, genauer: Streng monoton wachsend mit $x_n < 3$.

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot 2n \cdot 3n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} + ... \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

(mit geometrischer Reihe: $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$)

- Sei $\lim_{n\to\infty} = a$ und $x_n \geq 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. BEWEIS: Erster Fall: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $|x_N| < \varepsilon^2 \; \forall \; n \geq m$. Daraus folgt: $\left|\sqrt{x_n}\right| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Zweiter Fall: $a > 0$. Zu zeigen: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} \to 0$. Es gilt: $(\sqrt{a}-\sqrt{x_n})(\sqrt{a}+\sqrt{x_n}) = a - x_n$. Da $a - x_n$ gegen 0 geht und der Faktor $(\sqrt{a} + \sqrt{x_n})$ größer als 0 ist, folgt: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} = \frac{a-x_n}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}}$. Mit (8.7.1) und der Beschränktheit von $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}}$ (durch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und 0) folgt: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} \to 0$.

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \notin X$. Dann gilt: (X und $\left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in X \right\}$ sind beschränkt) $\Leftrightarrow$ ($\exists \; c, d > 0$ mit $c \leq x \leq d \; \forall \; x \in X$). Eine solche Teilmenge X heißt (bei Bender!) *positiv beschränkt.*

9 Metrische Räume; Häufungspunkte

9.1 Vorbemerkung

Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze $d(x,y) = |x-y|$ (Abstand). Dann gelten folgende Regeln:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Beweis: Setze $a = x - y$ und $b = y - z$; Es gilt: $|a+b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

9.2 Metrischer Raum

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften aus (9.1). Hauptbeispiel: $\mathbb{R}$.

9.3 Umgebungen, Beschränktheit

- Sei M ein metrischer Raum, $X \subseteq M$, $a \in M$. Definition: $U_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid d(x,a) < \varepsilon\}$ (wobei $\varepsilon > 0$) ist eine ε-*Umgebung* von a (bzw. ein Kreis um a mit dem Radius ε).
- X ist eine *Umgebung* von a genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subseteq X$. Äquivalent dazu ist die Bezeichnung: a ist ein *innerer Punkt* von X. Definitionen für *äußere Punkte* und *Randpunkte* folgen später genau.
- X heißt beschränkt genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit $d(x,y) < c\ \forall\, x, y \in X$. (d.h. X ist Teilmenge eines Kreises)
- a ist Häufungspunkt von X genau dann, wenn jede Umgebung von a unendlich viele „Punkte" von X enthält. Es genügt hier auch: Jede Umgebung von a enthält wenigstens ein Element aus $x \in X$ mit $x \neq a$.

9.4 Folgen im metrischen Raum, Cauchy

Sei M ein metrischer Raum.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M; $a \in M$. a heißt *Limes* von (x_n) genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a, x_n) < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \; \exists m \; \forall n \geq m : d(a, x_n) < \varepsilon$$

  Analoge Formulierung: Jede Umgebung von a enthält fast alle Glieder der Folge

- a ist ein *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn jede Umgebung U von a unendlich viele Glieder[11] der Folge enthählt.

- *Beispiel:* Die Häufungspunkte der Folge (in $\mathbb{R}$) 1 2 1 2 1 2 1 2 ... sind 1 und 2; die Folge der natürlichen Zahlen hat keine Häufungspunkte.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *konvergent* genau dann, wenn sie einen Limes besitzt.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *beschränkt* genau dann, wenn $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

- Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge* genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein m mit $d(x_p, x_q) < \varepsilon \; \forall \; p, q \geq m$. Gleichwertig: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein m mit $d(x_m, x_q) < \varepsilon \; \forall \; q \geq m$.

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn es natürliche Zahlen $j_1 < j_2 < j_3 < ...$ gibt mit $y_1 = x_{j_1}, y_2 = x_{j_2}, y_3 = x_{j_3}, ...$ Beispiele: Die Folgen der Quadratzahlen und der Primzahlen sind Teilfolgen der Folge aller natürlichen Zahlen,

9.5 Grundregeln

Sei M ein metrischer Raum.

1. Eine Folge in M hat höchstens einen Limes.
2. a ist Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn a Limes einer Teilfolge ist.
3. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie eine Cauchyfolge.
4. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist sie beschränkt.

[11] bzw. unendlich viele durch ihre Indizes unterscheidbare Folgeglieder

5. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und a Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ist a der Grenzwert der Folge.

6. a ist Limes von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(d(a,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Äquivalent dazu: es existiert eine Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $d(a,x_n) \leq |y_n|$ für fast alle n.

7. a ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn a Häufungspunkt der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist oder die konstante Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

8. Sei $X \subseteq M$. Wenn a ein Häufungspunkt von X ist, existiert eine Folge in X, deren Grenzwert a ist[12].

Beweis:

1. Zu $a, b \in M$ mit $a \neq b$ existieren Umgebungen A und B mit $A \cap B = \emptyset$.

2. Wenn a Limes einer Teilfolge ist, ist a trivialerweise Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Andere Richtung: Annahme: a ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit gilt: $U_{\frac{1}{n}}$ enthält unendlich viele Folgenglieder. Definiere eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $j_1 := 1$ und $j_{n+1} :=$ die kleinste Zahl $p > j_n$ mit $d(a,x_p) < \frac{1}{n+1}$. Es gilt: $d(a,y_n) < \frac{1}{n}$ für alle n. Also: $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

3. Sei $\varepsilon > 0$ und $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann existiert ein m mit $d(a,x_n) < \varepsilon \;\forall\, n \geq m$. Erhalte $d(x_p,x_q) < 2\varepsilon \;\forall\, p,q \geq m$.

4. $\exists\, m : d(x_p,x_q) < 1 \;\forall\, p,q \geq m$. Dannn ist $\{x_n \mid n \geq m\}$ beschränkt.

5. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $d(x_p,x_q) \;\forall\, p,q \geq m$. Es existiert ein $p \geq m$ mit $x_p \in U_\varepsilon(a)$. Dann ist $d(a,x_q) < 2\varepsilon \;\forall\, q \geq m$ (Dreiecksungleichung, $d(a,x_p) < \varepsilon$ und $d(x_p,x_q) < \varepsilon$)

6. Siehe Definition von Limes

7. *(nur mündlich)*

8. Für jede $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$. Betrachte die Folge der Abstände $d(a,x_n) < \frac{1}{n}$, dann ist a Grenzwert[13].

[12] „Warum schreibe ich das so kompliziert auf? Möglicherweise laufe ich zu viel in den Übungsgruppen herum...“

[13] Sprechstunde: Di $2 - \frac{1}{2}4$ (das kann man doch kürzen!) und Mo $2 - 3 - \frac{1}{2}4$ (also -3?)

9.6 Satz von Bolzano-Weierstrass

1. In $\mathbb{R}$ hat jede unendliche beschränkte Teilmenge einen Häufungspunkt.

2. In $\mathbb{R}$ hat jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt.

BEWEIS:

1. Sei $X \subseteq [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Definiere (simultan induktiv) zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...$ und $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ...$ mit $a_n < b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_n - a_n)$ und $X \cap [a_n, b_n]$ ist unendlich für alle n.

   Setze $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Seien $a_1, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ bereits definiert. Setze $m := a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$ (Mittelpunkt des Intervalls).

   (a) $X \cap [a_n, m]$ ist unendlich. Setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m$.

   (b) $X \cap [m, b_n]$ ist unendlich. Setze $a_{n+1} = m$ und $b_{n+1} = b_n$.

   Erhalte also eine Folge von Intervallen (Intervallschaltelung) mit $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ und $|X \cap [a_n, b_n]| = \infty$.

   Dann gilt für alle $i, j : a_i < b_j$. Also: $\lim_{n\to\infty} a_i = u := sup\{a_i\} \leq inf\{b_i\} =: v = \lim_{n\to\infty} b_i$. Zudem ist $(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b - a)$ Nullfolge. Also ist $u = v$!

   BEHAUPTUNG: u ist Häufungspunkt von X. Zu zeigen: Zu $\varepsilon > 0$ exsitieren unendlich viele $x \in M$ mit $x \in U_\varepsilon(u)$. BEWEIS: Es existiert ein n mit $b_n - a_n < \varepsilon$. Dann ist $U_\varepsilon(u) \geq [b_n, a_n]$. Damit gilt: $M \cap U_\varepsilon(u)$ unendlich.

   Beispiel: $u = sup\{a_i \mid i\}$ Dann: $u \in [a_n, b_n]\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\ n$ mit $b_n - a_n < \varepsilon$ (d.h. $[a_n, b_n] \subseteq U_\varepsilon(u)$).

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Setze $X := \{x_n \mid n\}$.

   (a) $|X| = \infty$, wende (1) an

   (b) X endlich. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstante Teilfolge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, also ist a Häufungspunkt.

9.7 Konvergenz von Cauchyfolgen

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchyfolge.

BEWEIS: Cauchyfolge mit (9.6) $\Longrightarrow$ beschränkt; mit (9.6) $\Longrightarrow \exists$ Häufungspunkt a; mit (9.5) $\Longrightarrow a$ ist Limes.

9.8 abgeschlossen

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt *abgeschlossen*, wennn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Beispiel: In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ (kompaktes Intervall) abgeschlossen, jedes Intervall $(a, b]$ o.ä. ist nicht abgeschlossen, da a Häufungspunkt ist, jedoch nicht zum Intervall gehört.

Allgemeine Regeln:

1. Jeder Schnitt von abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen.
2. Jede Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen.
3. Die Menge H aller Häufungspunkte einer Teilmenge X ist abgeschlossen.
4. Die Menge H aller Häufungspunkte einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist abgeschlossen.
5. Bezeichne $\overline{X} := X \cup H$ (siehe 3.) als den Abschluß von X, er ist abgeschlossen. H ist *dicht* in X.

Beweis:

1. Sei $D := \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, $h \in H(D)$. Zu zeigen: $h \in D$. Es gilt: $D \subseteq A_i$, ein Häufungspunkt von D ist also automatisch ein Häufungspunkt von A_i, da aber alle A_i abgeschlossen sind, liegen die Häufungspunkte in A_i.
2. Sei $V := \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $h \in H(V)$. Zu zeigen: $h \in V$. Annahme: $h \notin V$, dann folgt: $h \notin V \Rightarrow h \notin H(A_1), H(A_2), ...$ Dann existieren Umgebungen $U_1, U_2, ..., U_n$ von h, bei denen $U_i \cap A_i$ endlich ist. $U := \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ ist Umgebung von h und $U \cap V$ endlich, damit ist $h \notin H(V)$.
3. Sei a ein Häufungspunkt von H. Zu zeigen: $a \in H$, d.h. a ist Häufungspunkt von X. Sei U ein Kreis um a. Dann existiert ein $h \in H$ mit $h \in U$. Es existiert ein Kreis V und H mit $V \subseteq U$. Da h Häufungspunkt von X ist, ist $|V \cap X| = \infty$ und insbesondere $|U \cap X| = \infty$.
4. Annahme: a Häufungspunkt von $\overline{X}$ und $a \notin \overline{X}$. Dann: $a \notin X$, $a \notin H$, also ist a kein Häufungspunkt von X und kein Häufungspunkt von H. Es existiert eine Umgebung U von a mit $U \cup X = \emptyset$ und eine Umgebung

V von a mit $V \cup H = \emptyset$. Dann ist $(U \cap V) \cap (X \cup H) = \emptyset$. Da $(U \cap V)$ jedoch eine Umgebung von a ist, ist der Schnitt wieder eine Umgebung von a, die aber keine Elemente enthält, also kann a kein Häufungspunkt von $\overline{X}$ sein!

9.9 Teilmenge eines Metrischen Raumes

VORAUSSETZUNG: M metrischer Raum; $X \subseteq M$. Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt in X; BEHAUPTUNG: X ist beschränkt und abgeschlossen.

BEWEIS:

- Annahme X ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $d(x_n, x_j) \geq 42 \ \forall \ j < n$. Induktive Definition: Sind $x_1, ..., x_{n-1}$ gegeben, so ist $X \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{42}(x_i)$. Wähle $x_n \in X$ so, daß $x_n \in U_{42}(x_j)$ für $j = 1, ..., n-1$. Damit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt.

- Sei a Häufungspunkt von X. Zu zeigen: $a \in X$. Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, damit ist a der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $a \in X$.

10 Stetige Funktionen

10.1

VORAUSSETZUNG: D, M metrische Räume (Hauptbeispiel: $M = \mathbb{R}$ und D kompaktes Intervall, also $[a, b]$). Betrachtet wird $f : D \to M$ im Punkt $a \in D$.
DEFINITION: f heißt stetig in a genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $d(x, a) < \delta$.

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \mid d(x, a) < \delta \quad : \quad d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Andere Formulierungen:

- Zu jedem Kreis U um $f(a)$ existiert ein Kreis V um a mit $f(V) \subseteq U$.
- Zu jeder Umgebung U von $f(a)$ existiert eine Umgebung V um a mit $f(V) \subseteq U$.
- Für jede Umgebung U von $f(a)$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(U) \subseteq D$ eine Umgebung von a.
- anschaulich: zu jedem ε existiert ein δ, so daß im Intervall $(a - \delta, a + \delta)$ alle Funktionswerte im Intervall $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ liegen.
- ganz anschaulich: die Funktion macht keinen Sprung

DEFINITION: f heißt stetig, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Beispiel für eine nicht-stetige Funktion: Sei a gegeben. Sei $f(x) = 1$ für alle $x < a$, ansonsten $f(x) = 2$. Dann ist f an der Stelle a nicht stetig, da zu $\varepsilon = 0,5$ kein δ existiert, da $f(x)$ für alle $x > a$ gleich 2 ist.

10.2 Stetigkeit von Komposita

Jedes Kompositum $f \circ g$ von stetigen Funktionen ist stetig, genauer:

$$\left.\begin{array}{ll} f : D \to M & \text{stetig} \\ g : E \to D & \text{stetig} \end{array}\right\} f \circ g : x \mapsto f(g(x)) \text{ stetig}$$

BEWEIS: durch Kreise.

10.3 Lemma

Voraussetzung: D, M metrische Räume; $f : D \to M$ Abbildung, die in $a \in D$ **nicht** stetig ist.

Behauptung: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} = a$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

Beweis: f nicht stetig in a bedeutet: $\exists \varepsilon > 0 \,\forall\, \delta > 0 \,\exists\, x \in U_\delta(a)$ mit $f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$. Halte ε fest (sic!), Anwendung auf $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert: $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

10.4 Folgenkriterium für Stetigkeit

Voraussetzung: D, M metrische Räume, $f : D \to M$, $a \in D$.

Behauptung: Folgendes ist äquivalent:

(a) f ist stetig in a

(b) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \;\forall\; (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei U Umgebung von $f(a)$. Dann existiert eine Umgebung V von a mit $f(V) \subseteq U$. Für große n ist $x_n \in V$, also $f(x_n) \in f(V) \subseteq U$. Damit gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: f ist nicht stetig in a. Wende (10.3) an und erhalte $\varepsilon > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon \;\forall\; n$, das ist ein Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

10.5 Stetigkeit einer Summe etc. von Funktionen

Voraussetzung: D sei ein metrischer Raum und f, g Funktionen von D in $\mathbb{R}$, die in a stetig sind.

Behauptung:

1. $f + g$ ist stetig in a
2. $f \cdot g$ ist stetig in a

3. $\frac{f}{g}$ ist stetig in a bei $g(x) \neq 0 \; \forall \; x$

Beweis: Folgt aus (10.4) und Konvergenzregeln für Folgen, als Beispiel:

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Limes a.[14]

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(fg)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) \\
&= (\lim_{n\to\infty} f(x_n))\cdot(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) \\
&= f(a)\cdot g(a) \\
&= f(\lim_{n\to\infty}(x_n))\cdot g(\lim_{n\to\infty}(x_n)) \\
&= (fg)(\lim_{n\to\infty}(x_n))
\end{aligned}$$

10.6 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion f ist gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x, a \in D$ mit $d(x,a) < \delta$.

$$\exists\,\delta > 0 \;\; \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \forall\, x, a \in D \mid d(x,a) < \delta \;:\; d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

D.h. im Prinzip, daß δ unabhängig von a gewählt werden kann. In $\mathbb{R}$ ist jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig (siehe (10.9)).

10.7 Folgenkompaktheit

Nenne einen metrischen Raum *folgenkompakt* genau dann, wenn jede Folge einen Häufungspunkt hat. Beweis mit (9.6) und (9.5). Damit folgt: Jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist folgenkompakt.

Satz: Voraussetzung: D, M seien metrische Räume und D folgenkompakt. Sei f eine stetige Funktion von D in M.

Behauptung: Die Bildmenge $f(D)$ ist ebenfalls folgenkompakt.

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann existiert $x_n \in D$ mit $y_n = f(x_n)$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt $a \in D$. Es gibt eine Teilfolge $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes a (nach (9.5)). Da f stetig ist, folgt $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_{j_n})$ (Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$). Nach (10.4) ist $f(a)$ Häufungspunkt in $f(D)$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

[14] zum Beweis: „Erzählen Sie das nicht meinen Hiwis...“

10.8 Hilfssatz zum Umkehrsatz

SATZ: VORAUSSETZUNG: $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ monoton, $f(D)$ ist Intervall.

BEHAUPTUNG: f ist stetig (daraus folgt sofort (10.9).3).

BEWEIS: Annahme: f ist nicht stetig. Wende Hilfsats (sic!) (10.3) an. Erhalte $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, d.h. $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon \; \forall \; n$. Kann x_n monoton wählen. Nach (10.8.1) hat jede konvergente Folge reeller Zahlen hat eine monotone Teilfolge. Fallunterscheidungen:

1. f monoton wachsend.
   (a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

   Wähle u mit $f(a) - \varepsilon < u < f(a)$. Da $f(D)$ ein Intervall ist, existiert ein $x \in D$ mit $f(x) = u$. Es folgt: $x < a$. Wegen $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert ein m mit $x_m > x$, also folgt $f(x_m) \geq f(x) = u > f(a) - \varepsilon$, Widerpruch zur Stetigkeit.

   (b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Behauptung analog, Annäherung von oben an $f(a) + \varepsilon$.
2. f monoton fallend: wende Fall 1 auf die Funktion -f an, erhalte $-f$ stetig, also: f stetig.

10.8.1 monotone Teilfolge konvergenter Folgen

VORAUSSETZUNG: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahln.

BEHAUPTUNG: Es existiert eine monotone Teilfolge.

BEWEIS: Sei $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Es gilt mindestens einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine streng monoton wachsende Teilfolge

oder 2. Es gibt eine streng monoton fallende Teilfolge

oder 3. Es existiert eine konstante Teilfolge a.

10.9 Hauptsätze über stetige reelle Funktionen

„Ankündigung: Jetzt wird's spannend...“

VORAUSSETZUNG: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. SATZ:

1. *Zwischenwertsatz:* $f(D)$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$.

2. *Satz vom Maximum und Minimum:* $f(D)$ hat ein Maximum und ein Minimum

1+2. Zusammenfassung: $f(D)$ ist kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$

3. *„Umkehrsatz“:* Ist f streng monoton (also injektiv), so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(D)$ nach $\mathbb{R}$ stetig

4. f ist sogar gleichmäßig stetig

1+3. gelten sogar für beliebige Intervalle.

Beweis:

1. Sei $a_1, b_1 \in D$ und $f(a_1) \leq c \leq f(b_1)$. Zu zeigen: $\exists\, u \in D : c = f(u)$. Fallunterscheidung:

$a_1 = b_1$ trivial

$a_1 < b_1$ Definiere Intervallschachtelung $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$ und $a_i < b_i$. Es gelte $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ und $c \in [a_n, b_n]$ für alle n.

Erstes Intervall bekannt, induktive Definition: Sei $m = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } f(m) \geq c \\ [m, b_n] & \text{falls } f(m) \leq c \end{cases}$$

Dann existiert (analog zu (9.6)) genau ein u mit $a_n \leq u \leq b_n$ für alle n. Es gilt: $u = \sup\{a_n \mid n\} = \inf\{b_n \mid n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Damit ist $f(u) = c$.[15]

$a_1 > b_1$ Es gilt: $-f(b_1) \leq -c \leq -f(a_1)$. Der vorhergende Fall wird angewandt auf $-f$ und $-c$ anstelle von f und c, und a_1 und b_1 anstelle von b_1 und a_1. Erhalte $u \in D$ mit $-c = (-f)(u) = -f(u)$.

2. $D = [a, b]$ ist folgenkompakt (nach (10.7)). Also $f(D)$ ist folgenkompakt (Satz (10.7))[16]. Nach (9.9) ist $f(D)$ beschränkt und abgeschlossen. Damit existieren Infimum und Supremum von $f(D)$, diese sind Häufungspunkte. Da das Intervall abgeschlossen ist, enthält die Menge ihr Supremum und ihr Infimum, damit existieren Maximum und Minimum.

3. Siehe (10.8).

[15] „Hat hier jemand in dieser Woche Geburtstag?“ $\rightarrow$ Kreisel

[16] „Wer war fleißig? Keiner... macht nichts, in Ihrem Alter war ich auch nicht fleißiger, ... heute auch nicht.“

4. Annahme: f nicht gleichmäßig stetig. Das bedeutet: es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ Elemente $x, a \in D$ existieren mit: $d(x, a) < \delta$ und $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$.

   Halte ε fest. Anwendung auf $\delta = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$ liefert Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D. mit $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$ (*) und $d(f(x_n), f(a_n)) \geq \varepsilon$ (**). Es gilt: D ist folgenkompakt, da beschränkt und abgeschlossen. Also: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, ...$ mit $u = \lim_{n\to\infty} x_{j_n} \in D$. Wegen (*) ist auch $u = \lim_{n\to\infty} a_{j_n}$. Da f stetig ist, folgt: $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(a_{j_n})$ (mit (10.4)). Zudem ist $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(x_{j_n})$. Damit haben die beiden Folgen nicht für alle Folgenglieder den Abstand ε, das widerspricht(**)!

10.10 Anwendungen

1. Neuer Beweis für die Existenz von $\sqrt[n]{x}$ (bei $x \geq 0$): Das Bild der (stetigen!) Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}; f(x) := x^n$ ist das Intervall $\mathbb{R}_{\geq 0}$ [Zwischenwertsatz].

2. Die Umkehrfunktion von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) := \sqrt[n]{x}$ ist stetig [Umkehrsatz].

3. Ist $f : D \to \mathbb{R}(D \subseteq \mathbb{R}\text{Intervall})$ stetig und nimmt f einen positiven und einen negativen Wert an, dann auch den Wert 0 ($\exists\, x \in D mit f(x) = 0$).

   Beispiel: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$; ist eine Polynomfunktion mit $a_n \neq 0$ und n ungerade[17].

   Erinnerung: Polynomfunktionen sind stetig!

4. $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, dann folgt: die Funktion hat einen Fixpunkt. Beweis: Wende 3. an auf eine neue stetige Funktion g mit $g(x) = f(x) - x$. Beachte: $g(a) \geq 0 \wedge g(b) \leq b$.

10.11 Eindeutigkeit von stetigen Fortsetzungen

Voraussetzung: $f, g : D \to M$ stetig (D, M metrische Räume), $X \subseteq D = \overline{X}$; $f = g$ auf X

Behauptung: $f = g$

Beispiel: D Intervall in $\mathbb{R}$, $X = D \cap \mathbb{Q}$

Beweis: Sei $u \in D$. Zu zeigen: $f(u) = g(u)$. Sei $u \notin X$. Das impliziert

[17] „Weiß jeder, was eine ungerade natürliche Zahl ist?“

$u \in H(X)$. Es folgt: Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Mit (10.4) ergibt sich: $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Zudem $g(u) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, da $f(x_n) = g(x_n)$ folgt: $f(u) = g(u)$.

11 Konvergenz, Differenzierbark. v. Funktionen

11.1 Vorbemerkung

Man kann eine Folge $f_1, f_2, ...$ reeller Zahlen als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen ($f(n) := f_n$).

VERALLGEMEINERUNG: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt. Alle Konvergenzdefinitionen und Regeln bleiben gültig.

11.2 Stetigkeit in einem Punkt

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt.

DEFINITION: Folgendes sei äquivalent:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$
- Zu jeder Umgebung U von b existiert ein $m \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \in U \; \forall \, x \in D$ mit $x > m$
- $\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, m \in \mathbb{R} \; \forall \, x \in D | x > m \; : \; d(f(x), b) < \varepsilon$

Varianten:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (D nach unten unbeschränkt) $\forall \, x \in D$ mit $x < m$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (D unbeschränkt) $\forall \, x \in D$ mit $|x| > m$
3. Hauptvariante: $\lim_{x\to a} f(x)$ wobei a Häufungspunkt von D

Explizite Definition: Schreibe

$$\lim_a f = \lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow \forall U(b) \exists V(a) : f(V \setminus \{a\}) \subseteq U$$

(und $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < d(f(x), b) < \varepsilon \forall x \in D : d(x, a) < \delta$). Diese Definition gilt für Funktionen zwischen beliebigen metrischen Räumen.

Gleichwertig: Die Funktion $\hat{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \neq a \\ b & \text{falls} \quad x = a \end{cases}$ ist stetig in a.

Also: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ ist äquivalent zu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

11.2.1 Widerholungen

Folgende (Haupt)regeln gelten weiterhin:

1. Es existiert höchstens ein Grenzwert
2. $\lim f + g = \lim f + \lim g$
3. $\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$
4. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ (bei $\lim g \neq 0$)[18]
5. Folgenkriterium für Stetigkeit überträgt sich

11.2.2 Variationen von „b"

Exemplarische Definition: $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty :\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R} : |f(x)| > \varepsilon \,\forall\, x \in D : |x-a| < \delta$.

Hauptregel: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

11.3 Konvergenzregel für Komposita von Funktionen

VORAUSSETZUNG: Seien

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} & g &: E \to \mathbb{R} \\ D &\subseteq \mathbb{R} & f&(D) \subseteq E \subseteq R \\ a &\in H(D) & b &\in H(E) \\ \lim_{x\to a} f(x) &= b & \lim_{x\to b} g&(x) = c \\ f(a) = b \text{ falls } a &\in D & g(b) &= c \text{ falls } b \in E \end{aligned}$$

SATZ: $\lim\limits_{a} g \circ f = c$. BEWEIS: Folgt direkt aus (10.2) und den Sätzen oben.

11.3.1 alternative Darstellung mit $h \to 0$

VORAUSSETZUNG: D Intervall von $\mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $b \in \mathbb{R}$

BEHAUPTUNG: $b = \lim_{x\to\infty} ag(x) \Leftrightarrow b = \lim_{h\to 0} g(a+h)$.

BEWEIS:

„$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - b| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x-a| < \delta$. Für alle $h \neq 0$ mit $|h| < \delta$ folgt (Anwendung auf $h = x - a$, d.h. $x = a + h$): $|g(a+h) - b| < \varepsilon$. Also $\lim_{h\to 0} g(a+h) = b$.

[18]„Alles muß vorausgesetzt werden, ohne was die Geschichte hier nicht sinnvoll wäre." - Dürfen wir die Formulierung auch in Übungsaufgaben benutzen?

11.4 Differenzierbarkeit, Ableitung

VORAUSSETZUNG: $f : D \to \mathbb{R}$ mit D Intervall, Länge $\neq 0$. $a \in D$.

VORBEMERKUNG: Für $a \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = u$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - u = 0$

DEFINITION: f heißt *differenzierbar in a*, genau dann wenn ein u existiert, für das eben genannte Gleichungen gelten.

ACHTUNG: Definitionsbereich der Funktion $g : h \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist die Menge H aller h mit $h \neq 0$ und $a + h \in D$. Zudem ist 0 Häufungspunkt von H.

Eindeutigkeit: u ist, falls existent, eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: $f'(a) := u$.

DEFINITION: f differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f differenzierbar in a für alle $a \in D$. Erhalte dann eine neue Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ als *Ableitung von f*.

VERANSCHAULICHUNG: Die Ableitung in einem Punkt ist die „Steigung“ (der Tangenten) in diesem Punkt; Physik: wenn $f(t)$ eine Ortsfunktion abhängig von der Zeit ist, gibt $f'(t)$ die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t. Die zweite Ableitung $f''(t)$ gibt die Beschleunigung[19] zum Zeitpunkt t an.

11.4.1 ψ als Differenzienquotient

Gleichwertig zur Differenzierbarkeit von a ist: Es existiert ein $u \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\psi : H \to \mathbb{R}$ mit $f(a+h) - f(a) = h \cdot u + h \cdot \psi(h)$ und $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$ für alle $h \in H$.

Es genügt: $\psi : H_0 \to \mathbb{R}$ wobei $H_0 = H \cap U_\varepsilon(0)$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ (dabei ist $u = f'(a)$).

11.4.2 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

SATZ: Aus f diff. in a folgt: f ist stetig in a.

[19] „Wenn Sie sich ’n Auto kaufen, und da steht was von ner Beschleunigung von 1 auf 100 in einer Sekunde...“

Beweis:

$$\begin{aligned}
& f \text{ stetig in } a \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} (hu + h\psi(h)) = 0
\end{aligned}$$

11.4.3 Beispiele

1. Aus f konstant folgt: $f'(a) = 0 \; \forall \; a \in D$
2. $f(x) = x \; \forall \; x \in D$, dann folgt: $f'(a) = 1 \; \forall \; a \in D$

11.4.4 n-te Ableitung

Bezeichnung: Sei $f^{(1)} := f'$ und $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

11.5 Regeln

Voraussetzung:

- $f(a+h) - f(a) = hu + h\psi_1(h)$ bei $u = f'(a)$ und $\lim_{h\to 0} \psi_1(h) = 0$
- $g(a+h) - g(a) = hv + h\psi_2(g)$ bei $v = g'(a)$ und $\lim_{h\to 0} \psi_2(h) = 0$

Dann gelten folgende Regeln[20]:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(kf)' = k(f'), k \in \mathbb{R}$
3. $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
4. $(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$
5. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (Quotientenregel)
6. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) (und per Nachtrag auch für $n \in -\mathbb{N}$!)
7. $(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f) \cdot f'$ (Kettenregel)

[20] kleiner Vor-/Seitengriff: Differenzierbare Funktionen bilden einen Vektorraum, die Ableitung ist eine lineare Abbildung

Beweis:

1. $f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a)) = h(u+v)+h(\psi_1(h)+\psi_2(h))$
   Also: $f+g$ differenzierbar in a und $(f+g)'(a) = u+v$

2. $kf(a+h)-kf(a) = hku + hk\psi_1(h)$

3.
$$\begin{aligned}
A &:= [f(a)+hu+h\psi_1(h)] \\
B &:= [g(a)+hv+h\psi_2(h)] \\
(f\cdot g)(a+h) &= AB \\
&= (f\cdot g)(a) + h(f(a)v+ug(a)) + h(B\psi_1(h)+A\psi_2(h)) \\
&\to (f\cdot g)(a) + h(f(a)v+ug(a)) + h(f(b)\cdot 0 + f(a)\cdot 0)
\end{aligned}$$
   Also: $f\cdot g$ ist differenzierbar in a mit Ableitung $f(a)v+ug(a)$.

4.
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} &= \frac{1}{h}\cdot\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)} \\
&= -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\cdot\frac{1}{g(a+h)\cdot g(a)} \\
&\to -g'(a)\cdot\frac{1}{g(a)^2}
\end{aligned}$$

5. Wende die Produktregel an:
$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \\
&= f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' \\
&= f'\cdot\frac{g}{g^2} + f\cdot\frac{-g''}{g^2} \\
&= \frac{f'g-fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

6. Induktion nach n; *Verankerung*: Für $n=1$ bereits gezeigt, daß $x' = 1 = 1x^0$ ist. *Annahme*: Die Behauptung ist richtig für x^{n-1}. *Schluß*:
$$\begin{aligned}
x^n &= x^{n-1}\cdot x \\
&= ((n-1)\cdot x^{n-2}\cdot x) + (1\cdot x^{n-1}) \\
&= ((n-1)+1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Betrachte den Differenzienquotient $\frac{x^n-a^n}{x-a}$. Mit Hilfsformel $x^n - a^n = (x-a)\cdot(x^{n-1}a^0 + x^{n-2}a^1 + \cdots + x^1a^{n-2} + x^0a^{n-1})$ folgt: $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n} x^i a^{n-i-1}$. Für $x \to a$ geht die Summe gegen $n \cdot a^{n-1}$.

Nachtrag: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, damit $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)}$

7. Voraussetzung:
   - f, D, a wie eben; g, E, b analog
   - $f(D) \subseteq E$, $f(a) = b$
   - f in a und g in b differenzierbar
   - $f(a+h) - f(a) = hu + h\psi_1(h)$ bei $u = f'(a)$ und $\lim_{h\to 0}\psi_1(h) = 0$
   - $g(a+l) - g(a) = lv + l\psi_2(g)$ bei $v = g'(a)$ und $\lim_{l\to 0}\psi_2(l) = 0$

   Beweis: Setze $l(h) := h \cdot u + h\psi_1(h)$, damit $\lim_{h\to 0} l(h) = 0$. Also:

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) & = & b + l(h) \\ (g\circ f)(a+h) & = & g(f(a+h)) \\ & = & g(b+l(h)) \\ & = & g(b) + l(h)\cdot v + l(h)\psi_2(l(h)) \\ & = & (g\circ f)(a) + l(h)\cdot v + l(h)\psi_2(l(h)) \\ (g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) & = & huv + h(\psi_1(h)v + \dfrac{l(h)}{h}\cdot\psi_2(l(h))) \\ & \to & huv + h(0 + (u+0)\cdot 0) \\ & \to & huv \end{array}$$

   Also: $g\circ f$ ist differenzierbar mit $(g\circ f)' = uv$.

   Beispiele:

   (a) $f(x) = x^n; (g(x^n))' = g'(x)\cdot n \cdot x^{n-1}$
   (b) $g(x) = x^n; ((f(x))^n)' = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$

11.5.1 Ableitung von Polynom- und rationalen Funktionen

- Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist differenzierbar mit $f' = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}$.
- Eine Polynomfunktion ungleich 0 hat nur endlich viele Nullstellen (Anzahl $\leq n$).

- Jede rationale Funktion $\frac{f}{g}$ (mit f, g Polynomfunktionen) ist differenzierbar, Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$

11.5.2 Ableitung der Umkehrfunktion

VORAUSSETZUNG: $D \subseteq \mathbb{R}$, a Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und streng monoton (also injektiv), $f'(a) \neq 0$; sei $g : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $g : f(x) \mapsto x$ stetig in $b = f(a)$ (Bemerkung: aus $f(D)$ ist Intervall folgt nach (10.8) schon: g ist stetig).

BEHAUPTUNG: g ist differenzierbar in b mit $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, zudem (∗∗): b ist Häufungspunkt von $f(D)$.

BEWEIS: Für die Funktion $\varphi : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ gilt: $\lim\limits_{a} \varphi = f'(a)$ und $\varphi(x) \neq 0 \; \forall \, x \neq a$.
Wegen $\lim\limits_{b} g = g(b) = a$ folgt: $\lim_{y \to b} \varphi(g(y)) = f'(a)$ (nach (11.3)), also $\lim_{y \to b} \frac{1}{\varphi(g(y))} = \frac{1}{f'(a)}$ (nach (11.2)).
$\frac{g(y)-a}{f(g(y))-f(a)} = \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$, also $\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$, also $f'(a) = g'(b)$.
Beweis von (∗∗): Sei U Umgebung von b (in $\mathbb{R}$). Es existiert eine Umgebung von a mit $f(D \cap V) \subseteq U$ (da f stetig in a ist und $b = f(a)$ (11.4)). Da a Häufungspunkt von D, ist $|V \cap D| = \infty$, also $|f(V \cap D)| = \infty$ (da f injektiv). Damit ist $|U \cap f(D)| = \infty$.

11.5.3 Differenzierbarkeit der Wurzelfunktionen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$; $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ differenzierbar mit $g'(x) = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$, andere Formulierung: $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

BEWEIS: Wende (11.5.2) an mit $f(x) = x^n$, $b = f(a) = a^n$. Für $a \in D$ ist $f'(a) = na^{n-1} \neq 0$. Erhalte $g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}(b^{\frac{1}{n}})^{-(n-1)} = \frac{1}{n} b^{\frac{-n-1}{n}}$

11.5.4 Differenzierbarkeit von Potenzfunktionen

SATZ: Für jede rationale Zahl $q \neq 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $x \mapsto x^q$ differenzierbar mit $f'(x) = qx^{q-1}$.

BEWEIS: Schreibe $q = \frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Also: $f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^m$. Nach Kettenregel: $f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (x^{\frac{1}{n}-1}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$

12 Differenzierbare reelle Funktionen auf einem Intervall

VORAUSSETZUNG: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar (also stetig).

12.1 Ableitung an lokalen Maxima/Minima

DEFINITION: f hat ein lokales Maximum in $x_0 \in D$, falls gilt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

DEFINITION: f hat ein lokales Minimum in $x_0 \in D$, falls gilt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

SATZ: Ist x_0 innerer Punkt von D und $f(x_0)$ lokales Maximum oder Minimum, so ist $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS: Es gilt: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ (da x_0 innerer Punkt). Fallunterscheidung:

1. lokales Minimum: ε kann so gewählt werden, daß $f(x_0) \leq f(x)\ \forall\, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Für $x > x_0$ ist $\varphi(x) \geq 0$, für $x < x_0$ ist $\varphi \leq 0$, also $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.
2. lokales Maximum: analog

12.2 Satz von Rolle

VORAUSSETZUNG: $D = [a, b]$ (wobei $a < b$) mit $f(a) = f(b)$.

BEHAUPTUNG: Es existiert x_0 mit $a < x_0 < b$ mit $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS: Fallunterscheidung

1. Die Funktion ist konstant: $f' = 0$
2. Die Funktion ist nicht konstant. $f(D)$ hat ein Maximum und ein Minimum (nach (10.9)), es existiert ein $x_0 \in D$ mit $f(a) < f(x_0) = \max(f(D))$ oder $f(a) > f(x_0) = \min(f(D))$. Dann $a \neq x_0 \neq b$, f hat ein lokales Maximum oder Minimum.

12.3 Mittelwertsatz

Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$. BEHAUPTUNG: Es existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. (Spezialfall ist (12.2)).

Beweis: Sei $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann $F(a) = f(a) = F(b)$. Der Satz von Rolle (12.2) liefert: es existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$. Die Ableitung ist: $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$.

12.4 konstante Funktion $\Leftrightarrow$ Ableitung null

Satz: $f' = 0 \Rightarrow f$ ist konstant für Funktionen auf einem Intervall.

Beweis: Wende (12.3) an auf beliebige $a, b \in D$ an mit $a < b$, erhalte $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, d.h. $f(b) = f(a)$.

12.5 Funktionen mit gleicher Ableitung

Voraussetzung: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f' = g'$.

Satz: Es existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + k \; \forall \, x \in D$.

Beweis: Nach (12.4) ist $f - g$ konstant ($(f-g)' = f' - g' = 0$).

12.6 Monotoniekriterium

Behauptung:

1. $f' > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
2. $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
3. $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend
4. $f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Beweis:

1. Annahme, f sei nicht streng monoton wachsend. Dann exisiteren $a, b \in D$ mit $a < b$ und $f(a) \not< f(b)$. Erhalte aus dem Mittelwertsatz $x_0 \in (a,b)$ mit $0 < f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$
2. analog zu 3.
3. „$\Rightarrow$“ analog zu 1.
   „$\Leftarrow$“ Für jedes $a \in D$ ist $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \; \forall \, (x < a) \vee (x > a)$, damit ist auch der Limes ≥ 0.
4. analog zu 1.

12.7 Der Satz von Taylor

VORAUSSETZUNG: $a, b \in D, a < b, a \neq b, f^{(n)}$ existiert

BEHAUPTUNG: $\exists\, x_0, a < x_0 < b$ mit

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Der Spezialfall $n = 1$ ist der Mittelwertsatz:

$$f(b) = f(a) + 0 + \frac{b-a}{1} f'(x_0)$$

Der Spezialfall $n = 2$:

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(x_0)$$

BEWEIS: Definiere $k \in \mathbb{R}$ so, dass $f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} k$. Zu zeigen: es existiert x_0 mit $k = f^{(n)}(x_0)$. Definiere neue Funktion F:

$$F(x) := -f(b) + f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} k$$

Diese[21] Funktion ist offensichtlich differenzierbar[22]:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-(b-x)^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(x) + \frac{(b-x)^i}{i!} \cdot f^{(i+1)}(x) \right) + \frac{-(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} k \\
&= f'(x) + \left(-f'(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right) + \frac{-(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} k \\
&= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left(f^{(n)}(x) - k \right)
\end{aligned}$$

$F(a) = 0 = F(b)$, wende Satz von Rolle an: es existiert x_0 mit $F'(x_0) = 0$, d.h. $f^{(n)}(x_0) - k = 0$, d.h. wie gewünscht ist $f^{(n)}(x_0) = k$.

[21] Er fängt heute wieder an, an der Antenne zu zupfen...

[22] „... das einzige, was nicht von dem Summanden links getötet oder aufgefressen wird, ist...“

12.8 Kennzeichnung lokaler Extrema

VORAUSSETZUNG: $a \in D$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ exisitert und ist stetig (stetig in a genügt), $f^{(i)}(a) = 0$ für $i \in \{1, ..., n-1\}$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

BEHAUPTUNG:

1. Aus n ungerade und a innerer Punkt von D folgt. f hat kein lokales Maximum oder Minimum in a.
2. Aus n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$ folgt: lokales Minimum
3. Aus n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$ folgt: lokales Maximum

BEWEIS: Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ in a folgt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f^{(n)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n)}(x) < 0$ (je nachdem, ob $f^{(n)}(a)$ größer oder kleiner 0) für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon$.

Darf also annehmen: $f^{(n)}(x) > 0 \; \forall \, x \in D$ oder $f^{(n)}(x) < 0 \; \forall \, x \in D$. Wende die Taylor-Formel (12.7) an: $f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$.

1. Annahme: $f^{(n)} > 0$ (anderer Fall analog). Dann ist $f(b) - f(a) > 0$ für $b > a$ bzw. $f(b) - f(a) < 0$ für $b < a$ (es existiert für beide Fälle ein b).
2. $f(b) - f(a) > 0 \; \forall \, b$, damit $f(b) > f(a)$, damit $f(a)$ lokales Minimum
3. $f(b) - f(a) < 0 \; \forall \, b$, damit $f(b) < f(a)$, damit $f(a)$ lokales Maximum

13 Exponentialfunktion und Logarithmus

13.1 Haupsatz: Exponentialfunktion

VORAUSSETZUNG: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E' = E, E(0) = 1$

1. es gibt nur eine Funktion E
2. E ist streng monoton wachsend
3. $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
4. $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$
5. $E(-x) = E(x)^{-1}$

Bezeichnung: $e := E(1)$, $\exp x = e^x = E(x)$.

13.1.1 Vorbemerkung (Menge der Nullstellen)

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $X := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$.

BEHAUPTUNG: X ist abgeschlossen in D, Folgerung: für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\inf X_{\geq r} \in X$, falls $X_{\geq r} \neq \emptyset$.

BEWEIS: Sei a Häufungspunknt von X. Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a = \lim_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $f(a) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

13.1.2 Beweis des Hauptsatzes (Teil 1)

VORAUSSETZUNG: D Intervall, $E(x) \neq 0 \; \forall \, x \in D$. BEHAUPTUNG:

1. $G : D \to \mathbb{R}$, $G' = G \Rightarrow \; \exists \, k \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = k \cdot E(x) \; \forall \, x \in D$
2. $E(a + x) = E(a) \cdot E(x) \; \forall \, x \in D, a \in R$
3. $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \; \forall \, x \in D$

BEWEIS:

1. betrachte $\frac{G}{E} : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{G(x)}{E(x)}$. Es gilt:

$$\left(\frac{G}{E}\right)' = \frac{G'E - GE'}{E^2} = \frac{EE' - EE'}{E^2}0$$

   Damit ist $\frac{G}{E}$ konstant

2. Für festes a: Wende 1) an auf $G(x) = E(a+x)$. Klar: $G'(x) = E'(a+x) \cdot 1 = E(a+x) = G(x)$. Erhalte $E(a+x) = k \cdot E(x) \; \forall\, x \in D$. Durch $x = 0$ erhält man: $E(a) = E(a+0) = k \cdot E(0) = k$

3. $1 = E(x-x) = E(-x) \cdot E(x) \Rightarrow E(-x) = E(x)^{-1}$

13.1.3 Beweis des Hauptsatzes (Teil 2)

Behauptung: $E(x) > 0 \; \forall\, x \geq 0$

Beweis: Annahme: $\exists\, x \geq 0$ mit $E(x) \leq 0$.

1. E hat eine Nullstelle $a \geq 0$, denn $E(0) = 1 > 0$, E stetig, Zwischenwertsatz.
2. Wähle die Nullstelle minimal (nach (13.1.1)), $a \neq 0$ wegen $E(0) = 1$
3. $E(x) > 0 \; \forall\, x \in [0, a)$
4. Wende (13.1.2) an auf $D = [0, a)$. Erhalte $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \neq 0 \; \forall\, x$ mit $0 \leq x < a$
5. $D := (-a, a)$ ist wie in (13.1.2)
6. $\exists\, x \in D$ mit $a + x \in D$ (setzte einfach $x := -\frac{a}{2}$)
7. Wende (13.1.2) an: Erhalte $0 \neq E(a+x) = E(a) \cdot E(x) = 0 \Rightarrow 0 \neq 0$

13.1.4 Beweis des Hauptsatzes (Teil 3)

Behauptung: $E(x) > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ (nicht nur für positive x)

Wende (13.1.2) an mit $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Erhalte $E(-x) \neq 0 \; \forall\, x \in D$

13.1.5 Beweis des Hauptsatzes (Teil 4)

Behauptung: $E'(x) > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ (da $E' = E$), E streng monoton wachsend, $E(\mathbb{R}) = \varepsilon_{\geq 0}$ hä?

Beweis: Wende die Taylorformel (12.7) an mit $a = 0, f = E, n = 2$, erhalte für $x > 0$:

$$\begin{aligned} E(x) &= E(0) + xE'(0) + \frac{1}{2}x^2 E''(x_0) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 E''(x_0) \\ &> x \end{aligned}$$

$E(\mathbb{R})$ ist Intervall (nach Zwischenwertsatz), $R_{\geq 1} \subseteq E(\mathbb{R})$ und $(R_{\geq 1})^{-1} \subseteq E(\mathbb{R})$

13.2 Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion $L : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $E(x) \to x$ ist differenzierbar ((11.5.2)) mit $L'(x) = \frac{1}{x}$. Standardbezeichnung: $\log x := L(x)$. Regel: $\log uv = \log u + \log v$.

Beweis: Wende (11.5.2) an: $a \in \mathbb{R}$, $b = E()a)$. Erhalte $L'(b) = \frac{1}{E(a)} = \frac{1}{b}$. Schreibe $u = E(x), v = E(y)$. Dann ist nach (13.1): $uv = E(x+y)$, also $\log uv = x + y = \log u + \log v$.

13.3 beliebige Exponentialfunktionen

Zu $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha : x \mapsto E(\log a \cdot x)$, mit der Eigenschaft $\alpha(q) = a^q \ \forall \ q \in \mathbb{Q}$. Sie ist differenzierbar mit $\alpha'(x) = \log a \cdot \alpha(x)$. Standardbezeichnung: $a^x := \alpha(x)$, insbesondere: $e^x = E(x)$.

Die Ableitung der Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $a^x \mapsto x$ (Logarithmus zur Basis a) ist differenzierbar mit der Ableitung $x \mapsto \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x}$. Regeln:

1. α ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$
6. $\log_a u^y = y \cdot \log_a u$
7. $\alpha(mx) = \alpha(x)^m \ \forall \ m \in \mathbb{Z}$

Beweis: Nach (10.11) exisitert höchstens ein α. Definiere $\alpha := E(x \cdot \log a)$. Nach Kettenregel: $\alpha' = E(x \cdot \log a) \cdot \log a$, da α differnzierbar ist, ist sie auch stetig.

Regeln:

1. Definiere $\alpha = E \circ A$ mit $A : x \mapsto x \cdot \log a$, diese ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
2. $A(x + y) = A(x) + A(y)$
3. $(a^x)^y = E \cdot (y \cdot \log a^x) = E \cdot (x \cdot y \cdot \log a) = a^{(xy)}$

4. $(ab)^x = E(x \cdot \log ab) = E((\log a + \log b) \cdot x) = E(x \cdot \log a) \cdot E(x \cdot \log b) = a^x \cdot b^x$

5.

6. $\log a^x = \log \alpha(x) = x \cdot \log a$

13.4 Ableitung verketteter Exponentialfunktionen

VORAUSSETZUNG: $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x) > 0 \; \forall \, x \in D$.

BEHAUPTUNG: Die Funktion $B(x) = f(x)^{g(x)}$ ist differenzierbar mit

$$B'(x) = B(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \log f(x) \cdot g'(x) \right)$$

BEISPIEL:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$

2. $(x^x)' = x^x \cdot (1 + \log x)$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
B(x) &= f(x)^{g(x)} \\
&= (e^{\log f(x)})^{g(x)} \\
&= E(g(x) \cdot \log f(x)) \\
&= E'(g(x) \cdot \log f(x)) \\
&= E(g(x) \cdot \log f(x)) \cdot ((\log f(x))' \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x)) \\
&= B(x) \cdot (\log' f(x) \cdot f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x)) \\
&= B(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x) \right)
\end{aligned}$$

13.5 Limesdarstellung von e^x

Für jedes $x > 0$ gilt:

1. $\lim_{h \to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} = e^x$

2. $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

3. $f(h) = (1 + xh)^{\frac{1}{h}}$ streng monoton fallend

4. $g(h) = (1 + \frac{x}{n})^n$ streng monoton wachsend

Beweis:

1. Setze $a := \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{a} &= \log'(a) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} \\ e^x &\overset{(11.3)}{=} \lim_{h\to 0} e^{\frac{\log(a+h)-\log a}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{\log(a+h)}}{e^{\log a}}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

2. Folgt aus $\lim_{n\to 0} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen:

$$\exists\, r > 0 \text{ mit } |f(n) - e^x| < \varepsilon$$

   Es existiert $\delta > 0$ mit $|f(h) - e^x| < \varepsilon \;\forall\, h$ mit $|h| < \delta$. Also: $r = \frac{1}{\delta}$ ist dann wie gewünscht, denn $n > r \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{r} = \delta$.

3. kommt noch

4. gleichwertig zu eben

$$
\begin{aligned}
x = \frac{1}{a} &= \log'(a) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} \\
e^x &\overset{(11.3)}{=} \lim_{h\to 0} e^{\frac{\log(a+h)-\log a}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{\log(a+h)}}{e^{\log a}}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} (1+xh)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}
$$

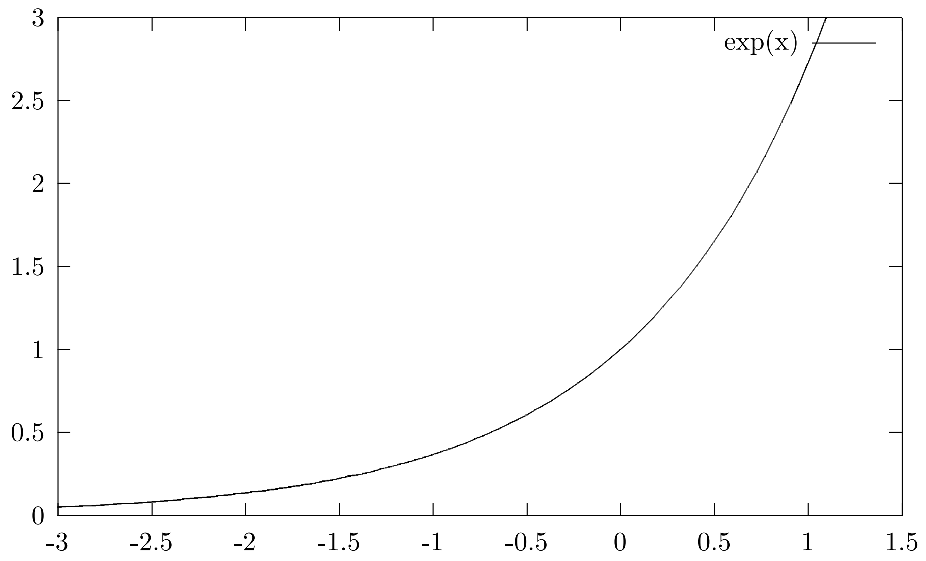
13.6 Annäherung an e

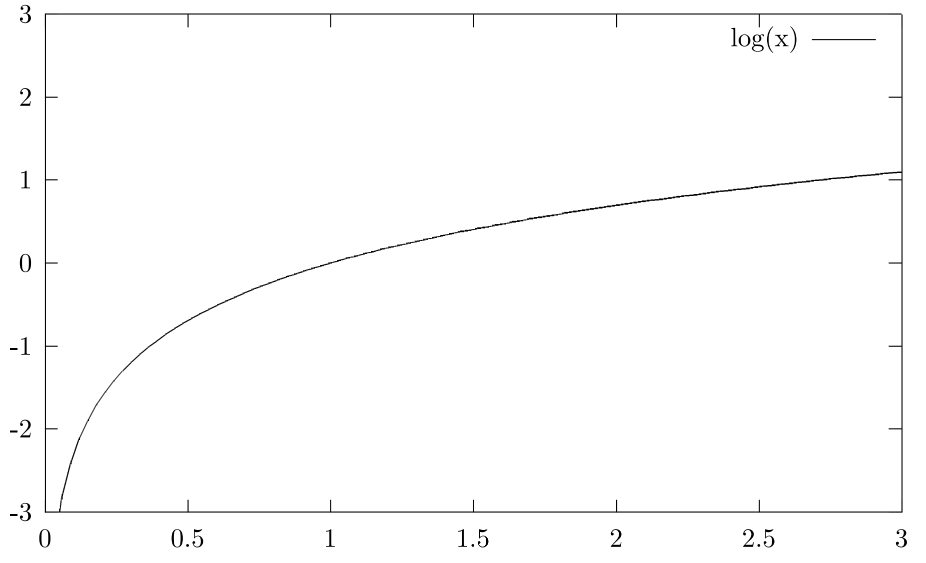
Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $S_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. Für $x > 0$ gilt: $S_n < e^x$ und $(1 - \frac{x^n}{n!}) \cdot e^x < S_{n-1}$ (für $n \geq 2$). Beispiel: $x = 1$, $n = 2 : 2{,}5 < e < 4$, $n = 4 : 2{,}7 < e < 2{,}75$, ... Beweis: Wende die Taylorformel (12.7) an:

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

13.7 Graphen





Es gilt offensichtlich:

- $(e^x)'$ monton wachsend, $(e^x)'' \geq 0 \; \forall \, x$
- $(\log x)'$ monton fallend, $(\log x)'' \leq 0 \; \forall \, x$

14 Sinus und Cosinus

Beachte Funktionen

$$\begin{aligned} S:\mathbb{R}\to\mathbb{R} &\qquad C:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ S'=C &\qquad C'=-S \\ S(0)=0 &\qquad C(0)=1 \\ \sin x := S(x) &\qquad \cos x := C(x) \end{aligned}$$

14.1 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f'=g, g'=-f$

BEHAUPTUNG: $\exists\, a,b\in\mathbb{R}$ mit $gS-fC=a$ und $fS+gC=b$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} (gS-fC)' &= gS'+g'S-fC'-f'C \\ &= gC-fS+fS-gC \\ &= 0 \\ (fS+gC)' &= fS'+f'S+gC'+g'C \\ &= fC+gS-gS-fC \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also: $gS-fC$ und $fS+gC$ sind konstant.

14.2 Hilfssatz $\sin^2+\cos^2=1$

BEHAUPTUNG: $\sin^2 x+\cos^2 x=1\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

BEWEIS: Wende (14.1) an mit $f=S$ und $g=C$. Erhalte $b=f(0)\cdot S(0)+g(0)\cdot C(0)=1$, b ist konstant, damit: $S(x)^2+C(x)^2=b=1$

Folgerung: $-1\le S(x)\le 1\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ und $-1\le C(x)\le 1\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

14.3 Hilfssatz

BEHAUPTUNG: $g=aS+bC$ und $f=bS-aC$ mit $a=-f(0)$ und $b=g(0)$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
aS &= (gs - fC)S = gS^2 - fCS \\
bC &= (fS + gC)C = fSC + gC^2 \\
aS + bC &= g(S^2 + C^2) = g \\
bs &= (fS + gC)S = fS^2 + gCS \\
aC &= (gS - fC)C = gSC - fC^2 \\
bs - aS &= f(S^2 + C^2) = f
\end{aligned}$$

14.4 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' = g$, $g' = -f$, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$

BEHAUPTUNG: $f = S$ und $g = C$

BEWEIS: Wende (14.3), $a = 0$, $b = 1$.

14.5 (un)gerade Funktionen sin/cos

BEHAUPTUNG:

- $\sin -x = -\sin x$ (sin ist eine *ungerade Funktion*)
- $\cos -x = \cos x$ (cos ist eine *gerade Funktion*)

BEWEIS: Wende (14.3) an mit $f(x) = -S(-x)$ und $g(x) = C(-x)$

$$\begin{aligned}
f(0) = 0 &\qquad a = 0 \\
g(0) = 1 &\qquad b = 1 \\
f(x) &= bS(x) - aC(x) \\
&= S(x) \\
g(x) &= aS(x) + bC(x) \\
&= C(x)
\end{aligned}$$

14.6 Additionstheorem

BEHAUPTUNG:

- $\sin x + y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\cos x + y = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

BEWEIS: Wende (14.3) an für festes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = S(x+y)$ und $g(x) = C(x+y)$, erhalte

$$\begin{aligned} g(x) &= aS(x) + bC(x) \\ f(x) &= bS(x) - aC(x) \\ \text{mit } a &= -f(0) = -S(y) \\ b &= g(0) = C(y) \end{aligned}$$

14.7 positive Nullstelle

BEHAUPTUNG: Sei $D := [0,2]$. $C(D)$ hat eine Nullstelle.

DEFINITION von $\pi \in \mathbb{R}$: $\frac{\pi}{2}$ sei die kleinste Nullstelle ≥ 0 (mit (13.1.1)).

BEWEIS: Annahme: $C(x) > 0 \; \forall \; x \in D$. Wegen $S' = C$ ist S streng monoton wachsend auf D. Für $x > 0$ folgt: $S(x) > S(0) = 0$.

Wende Taylorformel$_2$ (12.7) an: Es existiert ein $x_0 \in (1,2)$ mit

$$\begin{aligned} C(2) &= C(1) + C'(1) + \frac{1}{2}C''(x_0) \\ &= C(1) - S(1) - \frac{1}{2}S(x_0) \\ &=: u - v - \frac{1}{2}S(x_0) \\ &< u - v \\ u - v &> C(2) \\ &= C(1+1) \\ &= u^2 - v^2 \\ &= (u-v)(u+v) \\ (u-v) &> (u-v)(u+v) \\ u + v &< 1 \\ &= u^2 + v^2 \\ \text{aber: } 0 < u < 1 &\Rightarrow u^2 < u \\ \wedge 0 < v < 1 &\Rightarrow v^2 < v \end{aligned}$$

14.8 **Periodische Funktionen** sin/cos

$$\begin{array}{lcr|lcr} \sin\frac{\pi}{2} & = & 1 & \cos\frac{\pi}{2} & = & 0 \\ \sin x + \frac{\pi}{2} & = & \cos x & \cos x + \frac{\pi}{2} & = & -\sin x \\ \sin x + \pi & = & -\sin x & \cos x + \pi & = & -\cos x \\ \sin x + 2\pi & = & \sin x & \cos x + 2\pi & = & \cos x \end{array}$$

Sinus und Cosinus sind damit *periodische Funktionen* mit der Periode 2π.

14.9 Tangens und Cotangens

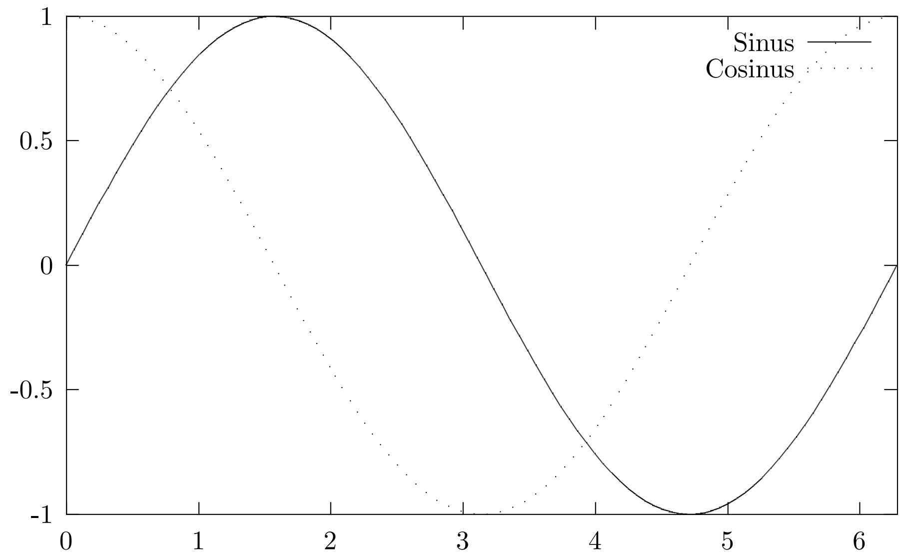
Definiere

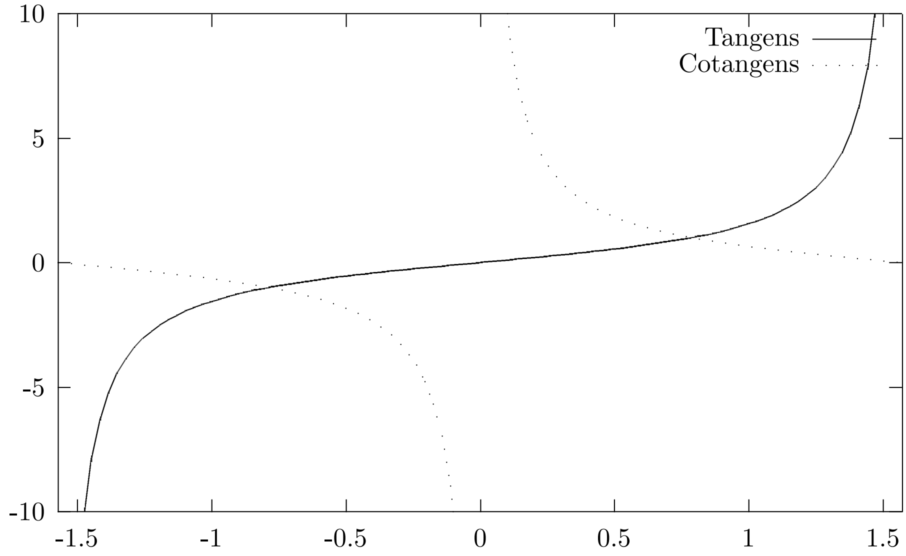
$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

Beide Funktionen sind periodisch mit Periode π wegen $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \operatorname{tg}^2 x \\
\operatorname{ctg}' x &= -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

14.10 Graphen





14.11 Arcus(co)sinus

Auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ mit } \sin x \mapsto x$$

ist auf $(-1,1)$ differenzierbar mit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis: Sei $b \in (-1,1)$ mit $b = \sin a$ Dann: $\sin'(a) = \cos a \neq 0$. Mit (11.5.2) gilt:

$$\arcsin' b = \frac{1}{\sin' a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

Analog: Auf $[0,\pi]$ ist die Cosinusfunktion streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion

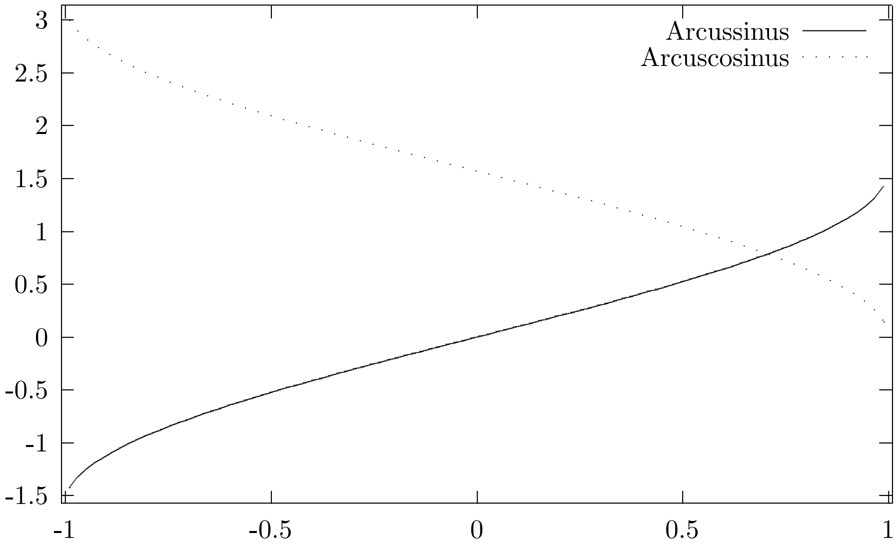
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \text{ mit } \cos x \mapsto x$$

ist auf $(-1,1)$ differenzierbar mit

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis: Sei $b \in (-1,1)$ mit $b = \sin a$ Dann: $\sin'(a) = \cos a \neq 0$. Mit (11.5.2) gilt:

$$\arcsin' b = \frac{1}{\sin' a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

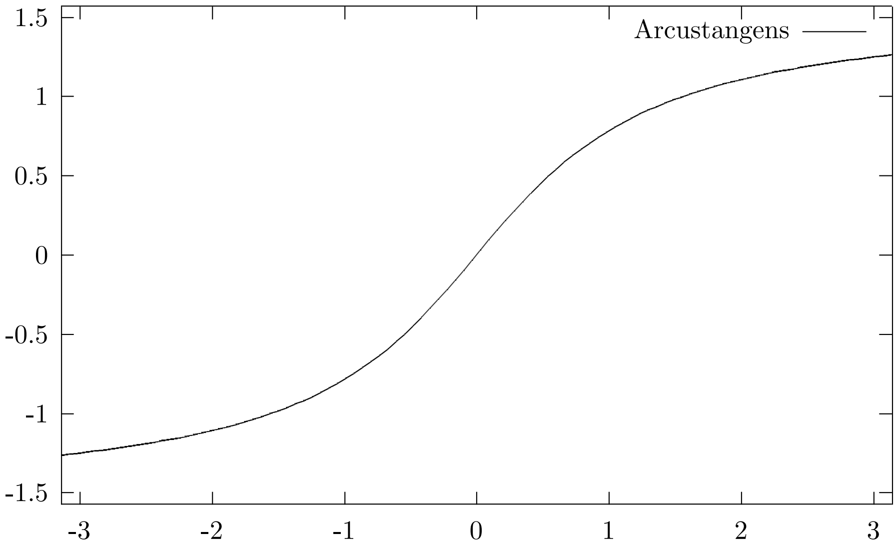


14.12 Arcus(co)tangens

Tangens und Cotangens sind auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. $(0, \pi)$ streng monoton mit Bild $\mathbb{R}$. Umkehrfunktionen:

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ mit } \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \text{ mit } \operatorname{arcctg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$



14.13 Abschätzungen

SATZ: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ BEWEIS:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \sin'(0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

BEMERKUNG: $\frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$

BEWEIS: Sete $b = \frac{\pi}{2}$. Mit Taylor:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(b) = \underbrace{\cos(0)}_{1} + b \cdot \underbrace{\cos'(0)}_{0} + \frac{b^2}{2} \underbrace{\cos''(x_0)}_{0<x_0<\frac{\pi}{2}} \\ &> 1 - \frac{b^2}{2} \\ \Rightarrow b^2 &> 2 \end{aligned}$$

15 Reihen reeller Zahlen und Funktionen

15.1 Konvergenz einer Reihe, geometrische und harmonische Reihe

Sei $x_1, x_2, ...$ eine Folge reeler Zahlen. Setze

$$\begin{aligned} s_1 &:= x_1 \\ s_2 &:= x_1 + x_2 \\ s_3 &:= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_n &:= \sum_{j \leq n} x_j \end{aligned}$$

Sei $u = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann sagen wir: die Reihe $\sum_j x_j$ konvergiert gegen u.

BEISPIEL:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

Allgemeiner: Die *Geometrische Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ konvergiert für $|q| < 1$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$$

BEWEIS[23]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} \\ \frac{q^n-1}{q-1} &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} \end{aligned}$$

SATZ: *Notwendiges* Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_n x_n$: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

BEWEIS: Reihe konvergent $:\Leftrightarrow$ (s_n) konvergiert $\Rightarrow$ $(s_n - s_{n-1})$ ist Nullfolge.

Umkehrung gilt nicht, Gegenbeispiel: *harmonische Reihe*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \infty$$

BEWEIS:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}$$

[23] „fangen wir mal hinten an, so daß auch alle Hiwis zufrieden sind...“

15.2 Regeln (trivial)

$$
\begin{aligned}
u &:= \sum_j x_j \\
v &:= \sum_j y_j \\
u+v &:= \sum_j x_j + y_j \\
k \cdot u &:= \sum_j k \cdot x_j \\
\left| \sum_j x_j + y_j \right| &= \underbrace{\sum_j |x_j| + \sum_j |y_j|}_{\text{falls konvergent}}
\end{aligned}
$$

15.3 Das Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\sum_j x_j \text{ konviert (sic!)} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=m}^{p} x_j \right| < \varepsilon\, \forall\, p \geq m$$

andere Version:

$$\Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=q}^{p} x_j \right| < \varepsilon\, \forall\, p, q \text{ mit } m \leq q \leq p$$

Beweis: Setze $s_N := \sum_{j`n} x_j$. Mit (9.5) und (9.7): $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge.

15.4 Absolute Konvergenz

Definition: Die Reihe[24] Σx_n ist *absolut konvergent*, genau dann wenn $\Sigma\,|x_n|$ konvergent. D.h. es existiert $c > 0$ mit $\sum_{n\leq m} |x_n| < c\, \forall\, m$.

15.5 Majorantenkriterium (M)

Sei die Reihe Σy_n absolut konvergent. Sei eine Reihe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $|x_n| \leq |y_n|$ für fast alle n. Dann folgt: Die Reihe Σx_n ist absolut konvergent.

[24] „Heute wollen wir uns nur mit wirklich wesentlichen Dingen beschäftigen“ Prof. Bender, kurz nachdem er über Karnevalsmützen und die physische Anstrengung während einer Vorlesung philosophierte

Hauptanwendung: harmonische Reihe (bzw. allgemeiner $y_n = kq^n$ für $k > 0$) als größere Reihe.

15.6 Konvergenz

Behauptung: aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz einer Reihe.

Beweis: Sei Σx_n absolut konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $\sum_{j=m}^{p} |x_j| < \varepsilon \; \forall \; p \geq m$ (Cauchy). Also: $\left|\sum_{j=m}^{p} x_j\right| \leq \sum_{j=m}^{p} |x_j| < \varepsilon$. Mit Cauchy: $\sum_j x_j$ konvergent.

15.7 Hauptbeispiel

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$(E) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

absolut, also auch die Reihen

$$(C) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$$

$$(S) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$$

Beweis: $\exists \, n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$. Setze $q := \frac{|x|}{n} < 1$ und $k = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ Für $j \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+j}}{(x+j)!} \right| &= k \frac{|x|^{j+1}}{n \cdot (n+1) \cdots (n+j)} \\ &\leq k \left(\frac{|x|}{n} \right)^{j+1} \\ &= kq^{j+1} \end{aligned}$$

15.8 Funktionenreihen

Betrachte eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$). Konvergiert $\Sigma f_n(x)$ für jedes $x \in D$[25], so erhalten wir eine neue Funktion

[25] punktweise Konvergenz

$f : D \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \sum_n f_n(x)$. Schreibe $f = \sum_n f_n$ (Grenzfunktion).
Seien alle f_n differenzierbar. Fragen:

1. Ist dann auch f differenzierbar?
2. Gilt dann sogar $f'(x) = \sum_n f_n'(x)\ \forall\, x \in D$?

betrachte Spezialfall: Potenzreihen

$$(P) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Abgeleitete Reihe wäre dann:

$$(P') = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Zudem würde dann gelten:

$$(E') = (E) \qquad (C') = (-S) \qquad (S') = (C)$$

15.9 Differenzierbarkeitssatz für Funktionen

Voraussetzung: Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$; $f_n = \Sigma f_n$; $\Sigma f_n'(a)$ konvergent; ΣL_n konvergent ($L_n \geq 0$); gelte $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n |x - y|\ \forall\, x, y \in D$[26].

Behauptung: f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = \Sigma f_n'(a)$.

Allgemeine Bemerkung: Sei $u = \Sigma x_n$. Für jedes n ist

$$u = \sum_{j \leq n} x_j + \underbrace{\sum_{j > n} x_j}_{konvergent}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert m mit

$$\left| u - \sum_{j \leq n} x_j \right| < \varepsilon\ \forall\, n \geq m$$

[26] f_n ist damit Lipschitzstetig

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert m mit $\sum_{j>m} L_j < \varepsilon$ und $\left|\sum_{j>m} f_j'(a)\right| < \varepsilon$. Erhalte für $x \in D, x \neq a$:

$$\begin{aligned}
A_j &:= \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x-a} \\
\text{erhalte } A &= \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_j f_j'(a) \right| \\
&= \left| \sum_j (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&= \left| \sum_{j\leq m} (A_j - f_j'(a)) + \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j\leq m} (A_j - f_j'(a)) \right| + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
\text{für ein } \delta > 0 \quad : &= \sum_{j\leq m} \underbrace{\left| \frac{f_j(x)-f_j(a)}{x-a} - f_j'(a) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{m}\ \forall\ x \in U_\delta(a)} + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&= \underbrace{\sum_{j\leq m} \left| \frac{f_j(x)-f_j(a)}{x-a} - f_j'(a) \right|}_{\leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m}} + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \varepsilon + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \varepsilon + \underbrace{\left| \sum_{j>m} A_j \right|}_{\leq \sum_{j>m} L_j < \varepsilon} + \underbrace{\left| \sum_{j>m} f_j'(a) \right|}_{<\varepsilon} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Also:

$$\exists\ \delta > 0 \text{ mit } A \leq 3\varepsilon\ \forall\ x \text{ mit } |x-a| < \delta$$

15.10 Hauptsatz

Sei D ein kompaktes Intervall. Konvergiert die abgeleitete Reihe

$$(P')\ \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \qquad \text{von} \qquad (P)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

absolut für jedes $x \in D$, so konvergiert auch (P) für alle $x \in D$ absolut.
Zudem ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

Beweis:

1. absolute Konvergenz von (P): für alle $n \geq |x|$ gilt: $|a_nx^n| \leq |na_nx^{n-1}|$.
   Wende das Majorantenkriterium (M) an.

2. Differenzierbarkeit: $f_n(x) = a_nx^n$;

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right| \\
= & \ |a_n| \cdot \left|\frac{x^n-y^n}{x-y}\right| \\
= & \ |a_n| \cdot \left|x^{n-1+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}}\right| \\
\leq & \ |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \text{ für } u \in D \text{ mit } |u| \geq |x| \geq x \in D \\
L_n := & \ |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \\
L_0 := & \ |a_0| \\
\sum_{n\geq 0} L_n = & \ \sum_n \underbrace{|a_n \cdot n \cdot U^n|}_{\text{konvergiert, da } (P') \text{ absolut konvergiert}}
\end{aligned}$$

16 Mehr über (unendliche) (Potenz)Reihen

16.1 Logarithmusreihe

Für $|x| < 1$ ist

1. $\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$
2. $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...$

Zusatz: Zu jedem $y > 0$ existiert genau ein x wie oben mit $y = \frac{1+x}{1-x}$, nämlich $x = \frac{1-y}{1+y}$.

Beweis:

1. Wende Hauptsatz (15.10) an mit $D = (-1, 1)$ und (P) als $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$, dann ist $(P') = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \pm ....$

   Siehe geometrische Reihe: $1+q+q^2+q^3+...$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$. Dann ist (P') die geometrische Reihe für $q = -x$, also konvergiert (P') absolut.

   Erhalte differenzierbare Funktion auf D mit $f(x) = (P)$, dann ist $f'(x) = (P') = \frac{1}{1+x}$, die Funktion $\log 1 + x$ hat dieselbe Ableitung.

   Also existiert eine reelle Zahl k mit $\log 1 + x = f(x) + k \; \forall \; x \in D$. Suche k: Für $x = 0$ folgt: $\log 1 = 0 = f(0)$, also $k = 0$. □

2. $$\begin{aligned} \log \frac{1+x}{1-x} &= \log 1 + x - \log 1 - x \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...\right) \\ &= (x + x) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\right) \pm ... \\ &= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + ... \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right) \end{aligned}$$

16.2 Arcustangensreihe

Für $|x| < 1$ ist

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm ...$$

Beweis: Analog zu (16.1) mit (P) als $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$ (wie oben) und $(P') : 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm ...$, wieder geometrische Reihe mit $q = x^2$.

Erhalte $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$ mit $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm ...$, welches auch die Ableitung der Arcustangens-Funktion ist. Weiter wie eben.

16.3 Endliche und unendliche Summen

Frage: Inwieweit kann man mit unendlichen Summen wie mit endlichen umgehen?

Illustration:

- $(1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0$ konvergiert
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ konvergiert nicht!

Die Reihe $(B) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} b_v$ gehe aus der Reihe $(A) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v$ durch sukzessive Zusammenfassung einiger Summanden hervor, Beispiel: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6, b_4 = a_7 + a_8$ usw. (beliebig).

Behauptung:

1. Konvergiert (A) gegen $a \in \mathbb{R}$, dann auch (B)
2. Konvergiert (B) gegen $b \in \mathbb{R}$, und ist
   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
   (b) $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3 + a_4, b_3 = a_5 + a_6$, stattdessen genügt auch die Voraussetzung, daß die Anzahl der Summanden b_n beschränkt ist (folgt durch Induktion nach der maximalen Summandenzahl m),

   so konvergiert auch (A) gegen b.

Beweis:

1. Die Teilsummenfolge $b_1, b_1+b_2, b_1+b_2+b_3, ...$ von (B) ist eine Teilfolge der Teilsummenfolge $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, ...$ Wegen $a = \lim_{s\to\infty} a_1 + ... + a_s$ folgt: $a = \lim_{t\to\infty} b_1 + ... + b_t$[27]
2. Sei $s_1, s_2, s_3, ...$ die Teilsummenfolge von (A). Es gilt: $s_{2n} = b_1+b_2+...+b_n$ und $s_{2n+1} = b_1 + b_2 + ... + b_n + a_{2n+1}$

   Also: $\lim_{n\to\infty} 2_{2n} = b$ (Vor.) und $b = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} +$

[27] „Gucken Sie da am besten gar nicht hin!“

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = b + 0$

Da beide Teilfolgen von $s_1, s_2, s_3, ...$ konvergieren, konvergiert auch die Folge, d.h. $b = a_1 + a_2 + a_3 + ...$

$\square$

16.4 Konvergenzkriterium von Leibnitz für alternierende Reihen

Voraussetzung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge [also $a_n \geq 0$].

Behauptung: Die Reihe

$$(A) := a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ...$$

ist konvergent. Zusatz: $0 \leq (A) \leq a_1$.

Beweis: Setze $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$ (z.B. $b_1 = a_1 - a_2$), dann gilt $b_n \geq 0$. Setze

$$s_n := b_1 + b_2 + ... + b_n = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - a_{2n}$$

Jede der Klammern ist ≥ 0, also ist $s_n \leq a_1$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monton wachsend und beschränkt (durch a_1), also existiert $b := \lim_{n\to\infty} s_n$, d.h. $b = \Sigma b_n$. Nach (16.3) ist auch $b = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ....$

Zusatzbemerkung: Sei b die Summe der Reihe. Schreibe $b = a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_9 - a_{10} + R$ mit $R = a_{11} - a_{12} \pm ....$ Damit ist $R \leq a_{11}$.

16.5 Logarithmus 2, Arcustangens 1

Erweiterung: Die beiden folgenden Gleichungen (aus (16.1) und (16.2)) gelten auch für $x = 1$.

1. $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$
2. $\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm ...$

Beweis:

0. Hilfssatz: Voraussetzung: $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig, M metrischer Raum; $X \subseteq M$; $f(x) \leq g(x) \;\forall\, x \in X$; $a \in M$ Häufungspunkt von X

   Behauptung: $f(a) \leq g(a)$

   Beweis: Annahme: $f(a) > g(a)$. Finde Umgebunden um $f(a)$ und $g(a)$, die sich nicht schneiden. Mit der Stetigkeit beider Funktionen folgt der Widerspruch.

1. Für $0 \leq x \leq 1$ ist $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, ...$ eine monoton fallende Nullfolge. Deshalb konvergiert nach (16.4) die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ....$ Definiere

$$S(x) := S_n(x) + R_n(x) := \underbrace{x - \frac{x^2}{2} \pm - \frac{x^{2n}}{2n}}_{S_n(x)} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm ...}_{R_n(x)}$$

Es gilt: $S(x) \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, zudem $0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Da $S(x) = \log 1 + x$ (16.1) gilt:

$$(*) \;\; 0 \leq \log 1 + x - S_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Nach Hilfssatz (mit $M = [0,1]$ und $X = [0,1)$ sowie $a = 1$) gilt $(*)$ auch für $x = 1$, d.h. $0 \leq \log 2 - S_n 1 \leq \frac{1}{2n+1}$, damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \log 2 - S_n(1) = 0 \Rightarrow \log 2 = \lim_{n\to\infty} S_n(1)$$

2. analog.

16.6 Konvergenzradius einer Potenzreihe

Sei $(P) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Dann gibt es drei Fälle:

1. Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$ (Konvergenzradius ist null).

2. Die Potenzreihe konverviert absolut für $x \in \mathbb{R}$ (Konvergenzradius ist unendlich).

3. $\exists\, r > 0$ derart, daß

   - (P) konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$
   - (P) divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > r$

   (Konvergenzradius ist r).

Zum Beweis genügt es, folgendes zu zeigen:

Voraussetzung: Sei $y \in \mathbb{R}$ derart daß $\sum_{i=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert.

Behauptung: (P) konvergiert für jedes $|x| < |y|$ absolut. Beweis: Seien x, y wie oben. Setze $q = \frac{|x|}{|y|} < 1$. Die Folge $(a_n y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, also beschränkt. D.h. es existiert $s > 0$ mit $|a_n y^n| < s \;\forall\, n$. Erhalte

$$|a_n x^n| = \left| a_n y^n \frac{x^n}{y^n} \right| = |a_n y^n| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq s q^n$$

Mit Majorantenkriterium[28] folgt: $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert absolut[29].

16.7 Wurzel- und Quotientenkriterium

16.7.1 erste Version

Voraussetzung: Sei $(R) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$.

Behauptung:

1. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für (fast) alle n, so konvergiert (R) absolut.
2. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für (fast) alle n, so konvergiert (R).
3. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so divergiert (R).
4. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so divergiert (R).

Beweis:

1. Folgt wegen $|a_n| < q^n$ aus dem Majorantenkriterium (M).
2. Erledigt sich auch mit dem Majorantenkriterium:
$$|a_n| \leq \left|a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq |a_1| \cdot q^{n-1}$$
3. Aus $|a_n| > 1$ für unendlich viel n folgt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Also ist (R) divergent.
4. Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ [d.h. $|a_{n+1}| \geq |a_n|$] für fast alle n folgt ebenfalls, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

Bemerkung: Aus $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle n folgt <u>nichts</u>![30] !

[28] „Ich schreib das hier noch mal hin für die jungen Leute.“
[29] „Im übrigen bin ich der Meinung, daß Computer die Leute eher verdummen.“
[30] Beispiel: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

16.7.2 weitere Varianten

VORAUSSETZUNG: Sei weiterhin $(R) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v$.

BEHAUPTUNG:

1. (a) Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert (R) absolut.
   (b) Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert (R) absolut.
2. (a) Ist $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert (R) absolut.
   (b) Ist $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so divergiert (R) absolut.
3. Mit $\limsup$ anstelle von $\lim$ bleiben (1) und (2a) richtig.
4. Die Reihe (R) divergiert auch, wenn $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ oder $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$[31] eine unbeschränkte Folge ist.

BEWEIS[32]:

1. Setze $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.
   (a) Wegen $L < 1$ existiert $q \in \mathbb{R}$ mit $L < q < 1$, es folgt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.
   (b) Wegen $L > 1$ ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n. Wende (16.7) an. :)
2. analog
3. setze $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, analog zu oben
4. erledigt mit (16.8)

16.8 Limes superior und inferior

- Sei $(X) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge, dann hat (X) mindestens einen Häufungspunkt. Die Menge H der Häufungspunkte ist abgeschlossen und beschränkt.
- H hat also ein Maximum h_{max}, dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := h_{max}$
- H hat zudem ein Minimum h_{min}, dann ist $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := h_{min}$

[31] „Der Punkt interessiert mich sowieso nicht.“
[32] „bla bla bla...“

- Setze $x_{max} = \limsup x_n$.
  - Aus $x_{max} > q$ folgt: $x_n \geq q$ für unendlich viele n.
  - Aus $x_{max} < q$ folgt: $x_n \leq q$ für fast alle n.

BEWEIS: Wäre $x_n > q$ für unendlich viele n, so hätte die Folge (X) eine Teilfolge $(X_T) := (x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{j_n} > q \ \forall\ n$. Dann hätte (X_T) einen Häufungspunkt $h \in H$ mit $h \geq q > x_{max}$. Widerspruch zur Definition von x_{max}.

- Genau dann ist $h \in H$, wenn eine Teilfolge von (X) existiert mit Limes h.
- Genau dann ist (X) konvergent, wenn $\limsup x_n = \liminf x_n$
- Falls $x_n \geq 0$ für alle n ist, gilt: Genau dann ist (X) eine Nullfolge, wenn $\limsup x_n = 0$.
- Für eine konvergente Folge $(Y) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \neq y := \lim y_n$ ist $H \cdot y$ die Menge der Häufungspunkt der Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere gilt dann (und falls $y > 0$ und $x_n \geq 0\ \forall\ n$ gilt): $\limsup x_n y_n = y \cdot \limsup x_n$.

16.9 Berechnung des Konvergenzradius' einer Potenzreihe

$$(R) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

Der Konvergenzradius der Reihe (R) ist ...

- ... 0, falls die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist.
- ... ∞, falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)
- ... $\frac{1}{L}$, falls $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$

Weitere Fälle gibt es nicht[33]. BEWEIS: Zu $0 \neq x \in R$ setze

$$b_n := \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$

Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt[34], so divergiert (R). Nehme daher $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als beschränkt an, d.j. $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

[33] Literaturempfehlung: Forster (Wesentliches in Kürze), Königsberger („*Mein Liebling!*“) und „Kleine Enzyklopädie der Mathematik“

[34] „ich war gerade wieder in einem anderen Märchen...“

- Mit $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ist $|x| \cdot L = \limsup b_n$.
- Mit $L = 0 \Leftrightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$
- (R) konvergiert absolut, falls $|x| \cdot L < 1$ (äquivalent zu $|x| < \frac{1}{L}$ für $L > 0$).
- (R) divergiert, falls $|x| \cdot L > 1$ (äquivalent zu $|x| > \frac{1}{L}$).

16.10 Konvergenzradius der Ableitung der Potenzreihe

Die Potenzreihen

$$(P) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \text{ und } (P') := \sum_{v=0}^{\infty} v a_v x^{v-1}$$

haben denselben Konvergenzradius.[35]

Beweis: Die Reihe (P') konvergiert für $x \neq 0$ genau dann, wenn $\sum\limits_{v=0}^{\infty} v a_v x^v$ konvergiert. Also hat (P') denselben Konvergenzradius wie die Reihe $(\tilde{P}) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} v a_v x^v$.

Wegen $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ und $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (nach (9.12.3)) sind die Folgen $\left(\sqrt[n]{|na_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beide unbeschränkt oder beide beschränkt.

- beide unbeschränkt: Alles hat Konvergenzradius 0 nach (16.9).
- beide beschränkt: Nach (16.8) gilt:

  $$\limsup \sqrt[n]{|na_n|} = \left(\limsup \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

  Also nach (16.9): Konvergenzradius von (P') = Konvergenzradius von $(\tilde{P})$ = Konvergenzradius von (P)

[35] „...ein Ergebnis, das wir gleich ausschlachten werden!“

16.11 Hauptsatz

Ist $r > 0$ (∞ ist zugelassen) der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v x^v$, so wird durch

$$f : (-r, r) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

eine differenzierbare Funktion definiert mit

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot a_v x^{v-1}$$

Beweis: Die abgeleitete Reihe konvergiert absolut auf $(-r, r)$ nach (16.10). Daraus folgt die Behauptung nach (16.9).

Beispiel:

- Reihe: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+...$ für $|x| < 1$, also ist Konvergenzradius 1.
- Erstes Differenzieren: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$
- Zweites Differenzieren: $\frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 4x^3 + ...$

16.12 Die Binomialreihe

$$\begin{aligned}
(1+x)^p &= \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n \ \forall\, p \in \mathbb{N}_0, |x| < 1 \\
\binom{p}{n} &= \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot ... \cdot \frac{p-(n-1)}{n} \\
(1+x)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \ \forall\ |x| < 1
\end{aligned}$$

Die Bionialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ hat für $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius 1.

Beweis: Setze $a_n := \binom{p}{n} |x^n|$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p-n}{n+1} |x|$, also

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim \left| \frac{p-n}{n+1} \right| |x| \cdot |-1| = |x|$$

Nach (16.7.2) konvergiert die Binomialreihe für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$.

16.13 Hauptsatz

Für $p \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ ist

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

Beweis: O.B.d.A ist $p \notin \mathbb{N}_0$. Erhalte aus (16.12) und (16.11) die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \text{ und } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{p}{n} x^{n-1}$$

Wegen $\binom{p}{n} = \frac{p}{n}\binom{p-1}{n-1}$ ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p-1}{n-1} x^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n \\
(1+x)f'(x) &= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^n + p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p-1}{n-1} x^n \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1} \right) x^n \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \\
&= p \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Mit $g(x) = (1+x)^p$ ist auch $(1+x)g'(x) = pg(x)$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
&= \frac{p}{1+x} \cdot (fg - fg) \\
&= \frac{p}{1+x} \quad \text{konstant } \cdot 0 = 0 \\
f(0) &= 1 \\
&= g(0)
\end{aligned}$$

Damit sind beide Funktionen gleich: $f = g$

16.14 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe um a

1. Zu einer Potenzreihe $(P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ gibt es drei Fälle:

   (a) Konvergenz nur für $x = a$ (Konvergenzradius 0)

   (b) Absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ (Konvergenzradius ∞)

   (c) Es existiert $r > 0$ mit absoluter Konvergenz für $|x-a| < r$ und Divergenz für $|x-a| > r$ (Konvergenzdarius r)

2. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius.

3. Sei $r > 0$ der Konvergenzradius von (P). Setze $D = (a-r, a+r)$ (bzw. $D = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$). Dann definiere eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ und } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

4. In 3. ist $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ \forall\, n$.

5. $\forall\, m \in \mathbb{N}, a \neq x \in D$ gilt $\sum_{n \geq m} a_n(x-a)^n = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-a)^m$ für ein x_0 echt zwischen a und x.

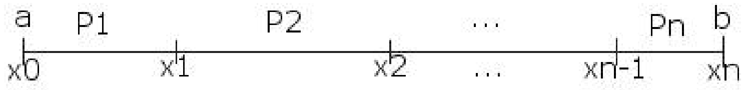
„Beweis:“ 1-3 sind im Wesentlichen Umformulierungen von (16.6), (16.10) und (16.11). Nr. 4 folgt aus 2 und 3: $f(a) = a_0, f'(a) = a_1, f''(a) = 2! \cdot a_2, f'''(a) = 3! \cdot a_3, \ldots$; Nr. 5 folgt *sofort* aus dem Satz von Taylor.

Bemerkung: Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f und $a \in D_f$ heißt die folgende Reihe Taylorreihe von f um a:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{f^{(v)}(a)}{v!}(x-a)^v$$

17 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Betrachte ein Intervall $D = [a, b]$ und eine beschränkte (später stetige) Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.
- Betrachte weiter endliche Intervallzerlegungen $\mathcal{P} = \{ P_i \mid i \in I\}$ (und I endlich), das soll bedeuten: jedes P_i ist ein Intervall, $\bigcup P_i = D$ und $|P_i \cap P_j| \leq 1$ für $i \neq j$.



- Die Länge des Intervalls P_i sei d_i (in der Anschauung: $d_i = x_i - x_{i-1}$), somit gilt: $\Sigma d_i = b - a$.
- Setze weiter $m := \inf f(D)$ und $M := \sup f(D)$. Entsprechend $m_i := \inf f(P_i)$ und $M_i := \sup f(P_i)$.
- Setze die Untersumme $\mathcal{P}_* := \sum_i m_i \cdot d_i$ und die Obersumme $\mathcal{P}^* := \sum_i M_i \cdot d_i$
- Es gilt: $m \leq m_i \leq M_i \leq M$

17.1 Unter- und Obersummen

Für jede untere Schranke m von $f(D)$ und für jede obere Schranke M von $f(D)$ gilt:

$$m(b-a) \leq \mathcal{P}_* \leq \mathcal{P}^* \leq M(b-a)$$

17.2 Unter- und Obersummen unterschiedlicher Intervallzerlegungen

Ist $\mathcal{Q} = \{Q_j \mid j \in J\}$ eine weitere Intervallzerlegung von D, so ist auch die Menge $\mathcal{R}$ der Schnitte $R_{ij} = P_i \cap Q_j$ eine Intervallzerlegung von D. Zudem gilt:

$$\mathcal{Q}_* \leq \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \leq \mathcal{P}^* \text{ und } \mathcal{P}_* \leq \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \leq \mathcal{Q}^*$$

BEWEIS: Für festes $i \in I$ ist $\{R_{ij} \mid j \in J\}$ eine Intervallzerlegung von P_i. Es folgt $d_i = \sum_{j \in J} d_{ij}$. Wegen $R_{ij} \subseteq P_i$ ist $m_i \leq m_{ij}$ und $M_{ij} \leq M_i$. Erhalte

$$\begin{aligned} P_* &= \sum_i m_i \cdot d_i \\ &= \sum_i \left(m_i \cdot \sum_j d_{ij} \right) \\ &\leq \sum_{i,j} m_{ij} \cdot d_{ij} \\ &= \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \end{aligned}$$

Alles andere analog.

17.3 Unter- und Oberintegral

Jede Untersumme ist eine untere Schranke der Menge aller Obersummen. Jede Obersumme ist eine obere Schranke aller Untersummen. Für das Supremum $\int_*$ (*Oberintegral*) aller Untersummen $\mathcal{P}_*$ und das Infimum $\int^*$ (*Unterintegral*) aller Obersummen $\mathcal{P}^*$ gilt: HONK!

$$m(b-a) \leq \int_* \leq \int^* \leq M(b-a)$$

DEFINITION: Eine Funktion f heißt integrierbar genau dann, wenn[36] $\int^* = \int_*$ ist.

17.4 Zerlegung in Teilintegrale

Lemma: Für $a \leq u \leq b$ gilt:

$$\left[\int^* = \right] \int_a^b = \int_a^{u\,*} + \int_u^{b\,*}$$

Dasselbe gilt für $\int_*$. Folgerung: f ist integrierbar auf $[a, b]$ genau dann, wenn f integrierbar ist auf $[a, u]$ und $[u, b]$.

BEWEIS: Sei $D_1 = [a, u]$ und $D_2 = [u, b]$ Ist $\mathcal{Z}_1$ Zerlegung von D_1 und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegung von D_2, so ist $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ eine Zerlegung von D und es gilt: $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}_1^* + \mathcal{Z}_2^*$.

[36] „...damit auch alles schön chaotisch wird...“

Mit $\mathcal{Q} = \{D_1, D_2\}$ sind diese $\mathcal{Z}$ genau die Zerlegung $\mathcal{R}$ in (17.2). Es folgt[37]:

$$\begin{aligned}\int^* &\overset{(17.2)}{=} \inf\{\,\mathcal{Z}^* \mid \mathcal{Z}\} \\ &= \inf\{\,\mathcal{Z}_1^* \mid \mathcal{Z}_1\} + \inf\{\,\mathcal{Z}_2^* \mid \mathcal{Z}_2\}\end{aligned}$$

17.5 Differenzierbarkeit der Stammfunktion

Ist f stetig in $u \in D$, ist die folgende Funktion differenzierbar:

$$F : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f : x \mapsto \int_a^{x*} f \text{ und } F'(u) = f(u)$$

Dasselbe gilt für $\int_*$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $|f(u+h) - f(u)| \le \varepsilon$ (d.h. $f(u) - \varepsilon \le f(u+h) \le f(u) + \varepsilon$) für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ und $u + h \in D$.
Behauptung: $\left|\frac{F(u+h)-F(u)}{h} - f(u)\right| \le \varepsilon$ für alle $h \ne 0$ wie oben.

Beweis: Fallunterscheidung:

1. Für $h > 0$: Nach (17.4) ist

$$\begin{aligned}F(u+h) &= \int_a^{u+h*} \\ &= \underbrace{\int_a^{u*}}_{=F(u)} + \int_u^{u+h*}\end{aligned}$$

   Wende (17.3) and auf $[u, u+h]$ anstelle von $[a, b]$. Mit $f(u) - \varepsilon$ anstelle

[37] „Es ist immer nur eins von beidem sinnvoll, das gilt - egal, was ich sage!“

von m und $f(u)+\varepsilon$ anstelle von M. Erhalte

$$\begin{aligned}
(f(u)-\varepsilon)\cdot h \leq & \quad \int_u^{u+h^*} & \leq (f(u)+\varepsilon)\cdot h \quad (*) \\
f(u)-\varepsilon \leq & \quad \frac{1}{h}\cdot\int_u^{u+h^*} & \leq f(u)+\varepsilon \\
-\varepsilon \leq & \quad \frac{1}{h}\cdot\int_u^{u+h^*} - f(u) & \leq \varepsilon \\
\Rightarrow & \quad \left|\frac{F(u+h)-F(u)}{h} - f(u)\right| & \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

2. Für $h<0$: Wende (17.4) auf $[u+h,u]$ an, erhalte wie oben

$$(f(u)-\varepsilon)\cdot(-h) \leq \int_u^{u+h^*} \leq (f(u)+\varepsilon)\cdot(-h)$$

(17.4) liefert jetzt: $F(u)=\int_a^{u*} = \int_a^{u+h^*} + \int_{u+h}^{u\ *}$, Rest analog.

17.6 Hauptsatz

Eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (mit $a<b$) ist integrierbar. Die Funktion

$$F:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ mit } x\mapsto\int_a^b f$$

ist eine *Stammfunktion* (d.h. $F'=f$) und für jede Stammfunktion g von f ist

$$\int_b^a f = g(b)-g(a)$$

Zusatz: Sei D ein beliebiges Intervall. $a\in D$ und $f:D\to\mathbb{R}$ stetig. Für $x\in D$ mit $x<a$ setze $\int_a^x := -\int_x^a$. Dann ist $F: x\mapsto\int_a^x f$ ist $F'=f$.

Beweis: f ist beschränkt (nach Analysis1)[38]. Nach (17.5) hat f eine Stamm-

[38] „[verwirrt] Wo ist denn mein Hauptsatz?!“

funktion g. Für F wie in (17.5) gilt: $F = g + k$ mit $k := -g(a)$ konstant.

$$\begin{aligned} F(x) &= g(x) - g(a) \\ F(b) &= g(b) - g(a) \\ \int_a^{b^*} &= g(b) - g(a) \\ \int_{a\ *}^{b} &= g(b) - g(a) \\ \Rightarrow \int_{a\ *}^{b} &= \int_a^{b^*} \end{aligned}$$

Damit ist f integrierbar.

Beweis Zusatz: Darf $D = [u, a]$ annehmen mit $u < a$. Für jedes $x \in D$ ist $\int_u^a = \int_u^x + \int_x^a$. Also gilt:

$$\begin{aligned} -F(u) &= \int_u^x -F(x) \\ F(x) &= \int_u^x f + F(u) \end{aligned}$$

Wobei $\int_u^x f$ nach Hauptsatz: differenzierbare Funktion von x mit Ableitung f.

Standardbezeichnung:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Die Bezeichnung dx ist sinnvoll, siehe folgende Beispiele:

$$\int_a^b 2xt\,dx \text{ und } \int_a^b 2xt\,dt$$

17.6.1 Beispiel

Beispiel: $D = [0, b]$ mit $0 < b$, Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, definiere einfach so $f(0) := 5$. Also existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht! Für $0 < a < b$ ist f auf $[a, b]$ integrierbar, da stetig.

Außerdem (nach (17.3)) ist

$$(-1)(a-0) \leq \int_{0\,*}^{a} \leq \int_0^{a\,*} \leq (a-0)$$

Also $\int_0^{a\,*} - \int_{0\,*}^{a} \leq 2a$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{b\,*} - \int_{0\,*}^{b} &\overset{(17.4)}{=} \int_0^{a\,*} + \int_a^{b\,*} - \int_{0\,*}^{a} - \int_{a\,*}^{b} \\
&= \int_0^{a\,*} - \int_{0\,*}^{a} \leq 2a \\
\int_0^{b\,*} - \int_{0\,*}^{b} &= 0
\end{aligned}$$

Also ist f integrierbar. **Merke:** Beim Integrieren kommt es auf die Endpunkte des Intevalls nicht an. Allgemeiner: Auf endlich viele Punkte kommt es nicht an wegen $\int_{a_0}^{a_n} = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i}$. Insbesondere: *Stückweise stetige* Funktionen sind integrierbar.

17.7 Uneigentliche Integrale

VORAUSSETZUNG: Sei $D := [a, b)$, $f : D \to \mathbb{R}$, integrierbar auf $[a, u]$ für alle $u \in D$.

DEFINITION: Falls der Limes existiert definiere:

$$\int_a^b f := \lim_{u\to b} \int_a^u f$$

Dabei ist auch $b = +\infty$ zugelassen. Analog für $D = (a, b]$, wobei auch $a = -\infty$ erlaubt ist:

$$\int_a^b f := \lim_{u\to a} \int_u^b f$$

Für $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ wähle ein beliebiges $c\in(a,b)$ und definiere entsprechend

$$\int\limits_a^b f := \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

17.7.1 Beispiel

Das Integral

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$$

existiert für jede Zahl $s>1$. Denn:

$$\int\limits_1^u \frac{dx}{x^s} = \left(\underbrace{\frac{-1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}}_{Stammfunktion}\right)\Bigg|_1^u = \frac{1}{s-1}\cdot\left(1-\frac{1}{u^{s-1}}\right)$$

17.8 Das Integralkriterium für Reihen

Voraussetzung: Sei $a\in\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}_{\geq a}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, zudem f monton fallend und $I:=\int\limits_a^\infty f$.

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ konvergiert gegen eine Zahl Z zwischen I und $f(a)+I$

Beispiel: Sei $a=1$, $f(x):=\frac{1}{x^s}$, $s>1$, $I=\frac{1}{s-1}$. Dann ist $Z=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n^s}$ und $\frac{1}{s-1}\leq Z\leq 1+\frac{1}{s-1}$.

Bemerkung: $\zeta : s\mapsto Z$ ist die Riemannsche Zetafunktion Beweis: Schreibe wieder $\int$ statt $\int f$. Setze für $m\in\mathbb{N}$:

$$s_m := \sum_{n=0}^m f(a+m) \text{ und } I_m := \int\limits_a^{a+m}$$

Wegen $f\geq 0$ ist $I=\sup\{\, I_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ und es genügt der Nachweis von $I_m\leq s_{m-1}$ und $s_m\leq f(a)+I_m$. Nach (17.3) ist für alle $n>0$ (wegen monton fallend): $f(a+n+1) \leq \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \leq f(a+n)$. Weiter (nach (17.4)) ist

$$\begin{aligned} I_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \leq \sum_{n=0}^{m-1} f(a+n) = s_{m-1} \\ I_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \geq \sum_{n=0}^{m-1} f(a+n+1) = s_m - f(a) \\ \Rightarrow s_m &\leq I_m + f(a) \end{aligned}$$

17.9 Triviale Folgerungen

Folgerungen aus der Definition der Ober- und Unterintegrale; seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $k \in \mathbb{R}$.

1. $f \geq g \Rightarrow \int^* f \geq \int^* g$ und $\int_* f \geq \int_* g$
2. $f \geq 0 \Rightarrow \int^* f \geq 0, \int_* fgeq0$
3. $k \geq 0 \Rightarrow \int^* kf = k \int^* f$ und $\int_* kf = k \int_* f$
   $k \leq 0 \Rightarrow \int^* kf = k \int_* f$ und $\int_* kf = k \int^* f$
4. $\int^* f + g \leq \int^* f + \int^* g$
   $\int_* f + g \geq \int_* f + \int_* g$

Somit ist mit f und g auch $f+g$ integrierbar, wobei $\int f + g = \int f + \int g$; und für jede reelle Zahl k ist auch kf integrierbar mit $\int kf = k \int f$.

17.10 Stetigkeit der Stammfunktion

1. Die Funktion F in (17.5) sind stetig, sogar gleichmäßig stetig, sogar Lipschitz-stetig, d.h. es existiert $L > 0$ mit

   $$|F(x) - F(y)| \leq L\,|x-y| \;\; \forall\, x, y \in D = [a,b]$$

2. Ist f stetig in $u \in D$ und $f(u) > 0$ sowie $f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in D$, so ist $\int\limits_{a\;*}^{b} f > 0$.

Beweis:

1. $D = [a,b]$, $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt, $F(x) = \int\limits_a^{x*} f$ (bzw. Unterintegral).

   Sei $x \leq y$, dann ist $F(x) - F(y) \overset{(17.4)}{=} \int\limits_x^y f$. Zudem ist

$$m(y-x) \leq \int\limits_x^{y*} f \leq M(y-x)$$

   Es folgt

$$\left| \int\limits_x^{y*} f \right| \leq \underbrace{\max\{|M|, |m|\}}_{L} \cdot (y-x)$$

2. Es existiert ein Intervall P positiver Länge l_P mit $f(x) \geq q \; \forall \; x \in P$ für ein $q > 0$. Sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von $D = [a,b]$ mit $P \in \mathcal{P}$. Dann ist $\mathcal{P}_* \geq l_P \cdot q > 0$.

17.11 Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung

- Voraussetzung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $m = \min f(D)$ und $M = \max f(D)$ (existieren nach (11.6.2))

  Behauptung: Gewöhnlicher Mittelwertsatz[39]: Es existiert $u \in D$ mit $\int\limits_a^b = f(u) \cdot (b-a)$

- Voraussetzung: Sei zuätzlich $g : D \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $g(x) \geq 0 \; \forall \; x \in D$.

  Behauptung: Verallgemeinerter Mittelwersatz: Es existiert $u \in D$ mit $\int\limits_a^{b*} fg = f(u) \cdot \int\limits_a^b g$ (analog für ein u' für $\int_*$)

  Beweis: Wegen $mg \leq fg \leq Mg$ ist

$$\int\limits_a^{b*} mg \leq \int\limits_a^{b*} fg \leq \int\limits_a^{b*} Mg$$

[39] Anekdote aus seiner Vorlesungezeit... „Das war das letzte Mal, daß ich das Maul aufgemacht habe!“

$$m \cdot \int_a^b g \le \int_a^{b^*} fg \le M \cdot \int_a^b g$$

Darf also $G := \int_a^b g \neq 0$ annehmen, sogar $G > 0$. Erhalte

$$m < \frac{1}{G} \cdot \int_a^b fg \le M$$

Mit Zwischenwertsatz ((11.6.1)) existiert $u \in [a,b]$ mit $f(u) = \frac{1}{G} \int^* fg$

- Bemerkung: Man kann zeigen: Aus der Integrierbarkeit von f und g folgt: fg ist integrierbar.

17.12 Die Taylorformel mit Integral

Voraussetzung: Sei D Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ sie $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, sei $a \in D$, $n \in \mathbb{N}_0$. Definiere $R := R_{n+1} = R_{n+1}(x)$ für $x \in D$ durch

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \right) + R = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R$$

Behauptung: $R = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

Beweis: Induktion nach n:

- Induktionsanfang: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ (nach (17.6), denn f' ist stetig)

- Induktionsannahme: Sei also $n \ge 1$ und $R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$

- Induktionsschluß: Für $g_n(t) := \frac{(x-t)^n}{n!}$ ist $g_n' = -g_{n-1}$. Die stetige Funktion $g_n f^{(n+1)}$ (auf D) hat eine Stammfunktion F. Dann ist

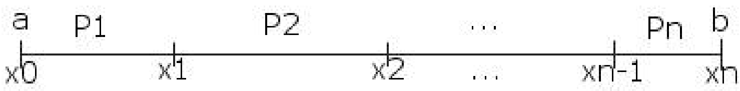
$$\left(F - g_n f^{(n)}\right)' = g_n f^{(n+1)} - g_n \cdot f^{(n+1)} + g_{n-1} \cdot f^{(n)} = g_{n-1} f^{(n)}$$

Es folgt mit (17.6):

$$\begin{aligned}\left(F - g_n \cdot f^{(n)}\right)\Big|_a^x &= \int\limits_a^x g_{n-1} f^{(n)} = R_n \\ &= F(x) - F(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \\ &= \int\limits_a^x g_n f^{(n+1)} + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \\ &= R + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a)\end{aligned}$$

17.13 Riemannsche Summen

Betrachte Funktion f und Zerlegung



$P_i = [a_{i-1}, a_i]$, $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$; $d_i = a_i - a_{i-1}$. Betrachte *Riemannsche Summen*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) d_i \text{ mit } x_i \in P_i$$

Dann gilt:

$$\mathcal{P}_* \leq S \leq \mathcal{P}^*$$

Definition: Feinheit von $\mathcal{P} := \max\{d_i \mid i = 1, ..., n\}$

Satz: Genau dann ist f integrierbar auf $[a, b]$ und es existiert damit $\int\limits_a^b f$, wenn ein I existiert, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|S - I| < \varepsilon$ für alle Riemannschen Summen S zu allen Zerlegungen $\mathcal{P}$ mit Feinheit $< \delta$.

17.14 Stammfunktion auf (nicht-)kompakten Intervall

Voraussetzung: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g' = f$ auf (a, b)

Behauptung: $g' = f$ auch auf $[a, b]$

Beweis: Existiert die Stammfunktion F von f nach (17.6). Dann ist $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) + c = g(x)$ für alle

$x \in (a,b)$. Ersetze F durch $F + c$. Dann ist $F(x) = g(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zudem ist $g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} F(x) = F(a)$, analog für $F(b)$.[40]

[40] „Warum ist die Funktion stetig? Weil sie differenzierbar ist! Wenn man keine Antwort weiß, stimmt diese Antwort in 70% der Fälle!"

18 Bestimmung „des unbestimmten Integrals“ einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Gesucht: Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g' = f$. Schreibe $\int f = g$ oder $\int f(x)\,dx = g(x)$ oder $\int f(x)\,dx = g(x) + c$ (c konstant). Nenne g *unbestimmtes Integral* von f. Gegenstand von (17) war das *bestimmte Integral.* Einfachste Ingegralrechenregeln:

$$\int f_1 + f_2 = \int f_1 + \int f_2 \text{ und } \int kf = k \int f \quad (k \in \mathbb{R})$$

18.1 Integrationsmethoden

18.1.1 Partielle Integration

Regel: Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ folgt:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Beispiele:

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1) \cdot e^x$
2. $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ (und analog für beliebige $\int x^n e^x\,dx$)
3. $\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x$
4. Auf $(-1, 1)$ (und damit nach (17.14) auch auf $[-1, 1]$) gilt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \sqrt{1-x^2} \cdot x - \int \underbrace{\frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}}_{f'} \cdot x\,dx \\
&= \sqrt{1-x^2} \cdot x + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{1-x^2} \cdot x + \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \right) dx \\
\Rightarrow 2 \cdot \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \sqrt{1-x^2} \cdot x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2} \cdot x + \arcsin x
\end{aligned}$$

Anwendung von Beispiel 4: Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius 1 um den Ursprung ist gleich $\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin 1 - \arcsin -1) = \frac{\pi}{2}$

18.1.2 Integration durch Substitution

Um $\int f(x)\,dx$ zu bestimmen, setze für x irgendeine Funktion einer neuen „Variablen" t ein, ersetze dx durch $\frac{dx}{dt}\cdot dt$, bestimme das Integral $\int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$ und drücke dann wieder t durch x aus.

BEGRÜNDUNG: Seien D, D^* Intervalle, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D^* \to D$ bijektiv, differenzierbar und $g'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in D^*$ mit Umkehrfunktion $u : D \to D^*$. Sei weiter G Stammfunktion der Funktion $t \mapsto f(g(t))g'(t)$. Definiere zudem $F : D \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto G(u(x))$.

BEHAUPTUNG: $F' = f$

BEWEIS[41]: $F'(x) = G'(u(x)) \cdot u'(x) = f(\underbrace{g(u(x))}_{=x}) \cdot \underbrace{g'(u(x)) \cdot u'(x)}_{=1} = f(x)$

BEISPIEL:

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Substituiere[42] $x = \sin t$. Also: $\frac{dx}{dt} = \cos t$. Erhalte[43]:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt \\
&= \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2t \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\underbrace{\sin t}_{x}\cdot\underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

18.1.3 Partialbruchzerlegung

Integration rationaler Funktionen $\frac{h}{f}$ (mit h, f Polynomfunktionen) mittels *Partialbruchzerlegung*. Es genügt der Fall[44] $\operatorname{grad} h < \operatorname{grad} f$. Dann existieren Polynome h^*, r mit

$$h = h^* f + r \text{ und } \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f \quad \text{(Division mit Rest)}$$

VORAUSSETZUNG: K ist Körper, $f \in K[x]$ Polynom, normiert; $f = f_1 \cdots f_n$ und $f_i = p_i^{e_i}$ mit $e_i \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_n$ normiert, irreduzibel und paarweise

[41] „Die Tafel harmoniert nicht so ganz mit der Kreide!"
[42] „...genial, wie ich bin..."
[43] mit Additionstheoremen $\cos 2t + 1 = 2\cos^2 t$ und $\sin 2t = 2\sin t\cos t$
[44] definiere hierfür $\operatorname{grad} 0 = -1$

verschieden. $0 \neq h \in K[x]$.

BEHAUPTUNG:

1. Es existieren $h_1, ..., h_n \in K[x]$ mit $\operatorname{grad} h_i < \operatorname{grad} f_i$ und es gilt:
$$\frac{h}{f} = \frac{h_1}{f_1} + \frac{h_2}{f_2} + ... + \frac{h_n}{f_n}$$

2. Sei nun $n = 1$. Setze $p = p_1$, $e = e_1$. Dann existieren $u_1, ..., u_e$ mit $\operatorname{grad} u_i < \operatorname{grad} p$ und es gilt:
$$\frac{h}{f} = \frac{u_1}{p} + \frac{u_2}{p^2} + ... + \frac{u_e}{p^e}$$

3. Zusatz: die h_i und u_i sind eindeutig bestimmt

BEWEIS:

1. Definiere Polynome $g_1, ..., g_n$ durch
$$g_j := \prod_{i \neq j} f_i = \frac{f}{f_j}$$
Polynome $g_1, ..., g_n$ sind teilerfremd[45]. Man kann h_i wählen, so daß gilt:
$$h = h_1 g_1 + ... + h_n g_n \text{ mit } h_j \in K[x]$$
Also gilt:
$$h = \frac{h_1}{f_1} + ... + \frac{h_n}{f_n}$$
Die h_i können so gewählt werden, daß $\operatorname{grad} h_i < \operatorname{grad} f_i$ ist, denn mit Division von h_i in $h_i = q_i f_i + r_i$ erhält man
$$\frac{h}{f} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i}_{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{f_i}$$
Falls $s \neq 0$, so ist
$$h = \underbrace{sf}_{grad \geq gradf} + \underbrace{\sum \frac{f}{f_i} r_i}_{grad < gradf}$$
Damit ist $s = 0$. Somit sind die h_i gefunden wie gewünscht.

[45] „Ich bin so klein, die Tafel ist so groß...“

2. Es ist $f = p^e$. Schreibe $h = qp + r$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p$. Dann ist $\frac{h}{f} = \frac{q}{p^{e-1}} + \frac{r}{p_e}$. Im Falle $q = 0$ ist nichts zu zeigen, bei $q \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} q &= \operatorname{grad} h - \operatorname{grad} p \\ &< \operatorname{grad} f - \operatorname{grad} p \\ &= (e-1) \cdot \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} p^{e-1} \end{aligned}$$

   Weiter mit Induktion nach e.

3. Beweis siehe Lineare Algebra

Irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$ haben einen grad 1 oder grad 2 (Beweis später). Damit wird die integrierbare rationale Funktion zurückgeführt auf folgende Fälle:

(1) $\int \frac{1}{(x+a)^m}\, dx$

(2) $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m}\, dx$

(3) $\int \frac{x+c}{(x^2+ax+b)^m}\, dx$

Dabei ist x^2+ax+b irreduzibel über $\mathbb{R}$. Wegen $x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)$ ist $b - \frac{a^2}{4} > 0$, also $x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + d^2$ mit $d > 0$. Es genügt also, statt (2) und (3) folgende zu betrachten:

(2′) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^m}\, dx$

(3′) $\int \frac{x+c}{(x^2+a^2)^m}\, dx$

Dabei kann noch $a = 1$ angenommen werden, da $x^2 + a^2 = a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)$. Zudem läßt sich bei (3′) das c durch Fall (2′) erledigen. Damit ergibt sich:

(2″) $\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\, dx$

(3″) $\int \frac{x}{(x^2+1)^m}\, dx$

Die Funktion $\log|x|$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und hat die Ableitung $\frac{1}{x}$. Damit gilt für die Fälle (1), (2″) und (3″):

(1) $\int \frac{dx}{(x+a)^m} = \begin{cases} \log|x+a| & \text{falls } m = 1 \\ \frac{-1}{m-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{m-1}} & \text{falls } m \geq 2 \end{cases}$

(2″) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{falls } m = 1 \\ \frac{1}{2(m-1)} \cdot \left(\frac{x}{(x^2+1)^{m-1}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}}\right) & \text{falls } m \geq 2 \end{cases}$

$(3'')$ $\int \frac{2x}{(x^2+1)^m}\, dx = \begin{cases} \log(x^2+1) & \text{falls} \quad m = 1 \\ \frac{-1}{m-1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} & \text{falls} \quad m \geq 2 \end{cases}$

BEISPIEL:

1. Sei $f(x) = (x-1)^3 \cdot x^2 \cdot (x^2+1)^2$ und $h(x)$ mit $\operatorname{grad} h < 9$. Dann ist

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{e} + \frac{e}{x^2} + \frac{u}{x^2+1} + \frac{v}{(x^2+1)^2}$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und u, v Polynome vom Grad ≤ 1. Weiter:

$$\frac{u}{x^2+1} = \frac{s}{x^2+1} + \frac{tx}{x^2+1}$$

mit $s, r \in \mathbb{R}$ und analog für v.

2. konkreter: $\frac{1}{x^3-4x} = \frac{1}{x(x-2)(x+2)}$ ergibt

$$\frac{1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

- Multipliziere mit x, setze $x = 0$, erhalte $a = -\frac{1}{4}$.
- Multipliziere mit $(x-2)$, setze $x = 2$, erhalte $b = \frac{1}{8}$.
- Multipliziere mit $(x+2)$, setze $x = -2$, erhalte $c = \frac{1}{8}$.

Entsprechend:

$$\int \frac{1}{x^3-4x} = \left(-\frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \int \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \int \frac{1}{x+2}\right)$$

3. Sei $\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}$ gegeben. Dann ist in den reellen Zahlen die folgende Zerlegung möglich:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+1} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

In den komplexen Zahlen:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{s}{x+i} + \frac{t}{x-i} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } s, t \in \mathbb{C}$$

- Multipliziere die Gleichung mit $(x-1)^2$ und setze $x = 1$, erhalte $b = \frac{1}{2}$

- durch weiteres Einsetzen bzw. Multiplizieren erhält man direkt Werte oder Gleichungssysteme für die Variablen a, b, c, d bzw. a, b, s, t:

$$x^3 = a(x-1)(x^2+1) + b(x^2+1) + cx(x-1)^2 + d(x-1)^2$$

- Konstante Glieder der Gleichung: $0 = -a + b + d$
- Glieder der Potenzen 1, 2...
- Glieder der Potenz 3: $1 = a + c$

18.2 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium

DEFINITION: Eine Menge X heißt Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ offene Intervalle $X_1, X_2, X_3, ...$ existieren mit $X_i = (a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq \varepsilon$ (die Menge der rationalen Zahlen und jede abzählbare Menge reeller Zahlen ist eine Nullmenge!). SATZ: Genau dann ist die beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wenn die Menge $\Delta = \{ x \in [a, b] \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$ eine *Nullmenge* ist. BEWEIS: siehe Zusatz-Vorlesung

19 Gleichmäßige Konvergenz

19.1 Definition gleichmäßige Konvergenz

Betrachte[46] Folge $f_1, f_2, f_3, ...$ oder eine Reihe $f_1 + f_2 + f_3 + ...$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktion f, d.h.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;\forall\, x \in D \quad \text{bzw.} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \;\forall\, x \in D$$

Beispiel: $f_n(x) = x^n$ für $D = [0,1]$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x < 1 \end{cases}$$

Dann ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Jedes f_n ist stetig, aber: die Grenzfunktion f ist nicht stetig.

Definition: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für fast alle n und alle $x \in D$.

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann wenn $|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| < \varepsilon$ für fast alle n und alle $x \in D$.

19.2 Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz: Der gleichmäßige Limes einer Folge oder Reihe stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.

Beweis: Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ gleichmäßiger Limes, seien die f_n stetig. Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\forall\, x \in D$$

Da f_n stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|f_n(a) - f_n(x)| < \varepsilon \;\forall\, x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta$$

Für diese x folgt:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x)| &= |f(a) - f_n(a) + f_n(a) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

[46] Kommentar zum begrenzten Tafelplatz: „In der Beschränktheit zeigt sich erst der Meister!“

19.3 Vertauschen von Integral und Limes

VORAUSSETZUNG: Seien f_n integrierbar auf $D = [a, b]$. Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

BEHAUPTUNG: f ist integrierbar mit

$$\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$$

BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle x für fast alle n, d.h.

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

Damit ist f beschränkt. Mit (17.9)(a) folgt:

$$\int (f_n - \varepsilon) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int (f_n + \varepsilon)$$

Damit ist

$$\int f_n - \varepsilon \cdot (b-a) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int f_n + \varepsilon \cdot (b-a)$$

und es folgt:

$$\left| \int_* f - \int^* f \right| \leq \varepsilon(b-a) \Rightarrow \int_* f = \int^* f$$

und zudem

$$\left| \int f - \int f_n \right| < \varepsilon 2 \cdot (b-a) \text{für fast alle} n$$

19.4 Vertauschen von Ableitung und Limes

VORAUSSETZUNG: Seien $f_1, f_2, ...$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$, konvergiere $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und konvergiere $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ fÜr ein $x_0 \in D$

BEHAUPTUNG: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig mit

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$$

Für Reihen analog: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig mit

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f'_i$$

Beweis: Sei $g_n := f_n'$ stetig. Damit ist $g_n := \lim_{n\to\infty} g_n$ stetig. Für jedes $x \in D = [a,b]$ gilt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} g_n$$

Nach Hauptsatz (17.6) gilt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g_n = f_n(x) - f_n(x_0)$$

Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$, Erhalte $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Mit $k_n := f_n(x_0)$ und $k := f(x_0)$ folgt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g = f(x) - k$$

Nach Hauptsatz der Integralrechnung (17.6) gilt:

$$(f-k)' = g \Rightarrow f' = g$$

Es bleibt zu zeigen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig*. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} g - \int g_n + k - k_n \right| \\
&\leq \underbrace{\left| \int\limits_{x_0}^{x} (g - g_n) \right|}_{<\varepsilon\text{ffan}\ \forall\ y\in D} + \underbrace{|k - k_n|}_{<\varepsilon\text{ffan}} \\
\Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} g - g_n &\leq \varepsilon \cdot |x - x_0| \\
&\leq \varepsilon \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Erhalte $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \dot{(} b-a) + \varepsilon$ für fast alle n., damit ist f der gleichmäßige Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

19.5 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Satz:

1. Für Folgen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ für fast alle p, q und alle x gilt:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

2. Für Reihen: $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ für fast alle m, p und alle x gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f_{p+i}(x)\right| \leq \varepsilon$$

Beweis: Teil 1 genügt.

„$\Leftarrow$“ Für festes x ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, konvergiert also. Setze $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Sei $\varepsilon > 0$, es existiert n mit $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ für alle $p, q \geq n$.

Behauptung: $|f(x) - f_p(x)| \leq 2\varepsilon$ für alle x und $p \geq n$.

Wähle dazu bei festem x die Zahl $q \geq n$ so, daß $|f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_p(x)| &= |f(x) - f_q(x) + f_q(x) - f_p(x)| \\ &\leq |f(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f_p(x)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“ Sei $f = \lim_{n\to\infty} (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Für fast alle p, q ist

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \;\forall\; x \text{ und } |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \;\forall\; x$$

Also:

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &= |f(x) - f_g(x) + f_p(x) - f(x)| \\ &= |f(x) - f_g(x)| + |f_p(x) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

19.6 Weierstrass-Kriterium

Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ konvergiert gleichmäßig, falls $L_n \geq 0$ existieren mit

- $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ konvergent
- $|f_n(x)| \leq L_n \;\forall\; n, x$

Dann heißt $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ *normal konvergent*.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert q mit $\sum_{n=q}^{\infty} L_n \leq \varepsilon$. Erhalte

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{m} f_{p+i}(x) \right| &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_{p+i}(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} L_{p+i} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $p \geq q$ und alle m. Wende (19.5) an. Beispiel:

1. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ mit Konvergenzradius r ist normal konvergent auf $D = [-a, a]$ für alle $a \in (0, r)$

   Beweis: es existiert y mit $a \leq y < r$. Setze $L_n = |a_n|\,|x^n|$, dann ist $|a_n x^n| \leq L_n \;\forall\; x \in D$. Wegen $|x| < |y|$ ist $\sum\limits_{v=0}^{\infty} L_v = \sum\limits_{v=0}^{\infty} |a_v y^v|$ konvergent.

2. Die Reihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v^2} \sin(v^2 x)$ ist normal konvergent mit $L_n = \frac{1}{n^2}$. $\sum_{n=0} \infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach (17.8).

3. Die *Tagaki-Funktion*, seien f_n definiert durch folgenden Graphen:

   Behauptung:

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{gleichmäßig konvergent}$$

   Beweis: Wende das Weierstrasskriterium an mit L_n mit $L_n = \frac{1}{2} 4^{-n}$ ($\sum L_n$ ist geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{4}$), also: f ist stetig (19.2).

   Aber: f ist nirgends differenzierbar. !

   Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Wähle $h_n = \pm \frac{1}{4} 4^{-n}$, so daß f_n zwischen x und $x + h_n$ linear verläuft. Das gilt dann auch für alle f_k mit $k \leq n$, und es folgt:

   $$\frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \pm 1$$

Wäre f in x differenzierbar, so wäre

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n}}_{\pm1\pm1\ldots\pm1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k(x+h_n)-f_k(x)}{h_n}}_{(*)=0} \end{aligned}$$

Das ist jedoch ein Widerspruch, der Limes existiert also nicht, da $\pm 1 \pm 1 + ...+$ nicht konvergiert.

Beweis der Behauptung $(*)$: f_n ist periodisch mit Periode 4^{-n}, f_k ist periodisch mit Periode $4^{-k} = \frac{1}{z}4^{-n}$ für ein $z \in \mathbb{N}$, also: f_k periodisch mit Periode 4^{-n}. Damit ist f_{n+1} periodisch mit Periode h_n, damit auch f_k für alle $k \geq n+1$, d.h. $f(x+h_n) - f_k(x) = 0$.

20 Normierte Räume

20.1 Definition

- Definition: Ein *normierter Raum* (über $\mathbb{R}$) ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einer *Normfunktion* $N : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Normfunktion bedeutet: Für alle $v, u \in V$ gilt:

  1. $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  2. $N(kv) = |k|\, N(v)\ \forall\, k \in \mathbb{R}$
  3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$

  Übliche Bezeichnung für N: $|v|$ oder $\|v\|$

- Ein normierter Raum V ist auch ein Metrischer Raum: $d(u, v) := N(u - v)$ ist eine Metrik auf der Menge V (folgt genau wie für $V = \mathbb{R}$).

- Definition: Normen N, N' auf V heißen *äquivelent* genau dann, wenn $r, r' > 0$ existieren mit

$$N(v) \leq r'N'(v) \wedge N'(v) \leq rN(v)\ \forall\, v \in V$$

  Äquivalente Normen führen zu demselben Umgebungsbegriff, also zu demselben Konvergenzbegriff in V:

$$U_\varepsilon(v) = \{\, u \in V \mid N(u - v) < \varepsilon\} \subseteq \{\, u \in V \mid N'(u - v) < r'\varepsilon\} = U'_{r'\varepsilon}(v)$$

  Das gilt auch für Cauchyfolgen und gleichmäßige Stetigkeit.

20.2 Die Supremumsnorm

- Sei $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ (also ein Teilraum von $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$). Die *Supremumsnorm* auf $V = \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ ist definiert als:

$$\|f\| = \|f\|_D = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in D\}$$

  Bemerkung: Man kann $\mathbb{R}^n$ als $\mathcal{F}(\{1, ..., n\}, \mathbb{R})$ auffassen, dann ist $\|f\|_D = \|f\|_\infty$.

- Frage: Was bedeutet $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ für $f, f_1, f_2, ... \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$?

$$\forall\, \varepsilon > 0\, f.f.a.\, n\ :\ \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

Nach (19.5) gilt: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ genau dann, wenn für alle

$$\forall\, \varepsilon > 0\, f.f.a.\, p, q \;:\; \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$$

Das bedeutet: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge; jede Cauchyfolge in $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ konvergiert und damit ist $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ vollständig.

- DEFINITION: Ein *Banachraum* ist ein vollständiger, normierter Raum.

  SATZ: In jedem Banachraum gilt: Wenn eine Reihe absolut konvergent, ist sie auch konvergent. Für $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ist das das Weierstrass-Kriterium (19.6).

- Sei $D = [a, b]$. Dann ist $\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ein Teilraum von $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ (Satz von Minimum und Maximum). Außerdem ist $\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ ist ebenfalls ein Banachraum, denn nach (19.2) ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ stetig für jede in $\mathcal{B}$ konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}$.

- Sei $D = [a, b]$. Dann ist $\mathcal{R} := \mathcal{R}(D,\mathbb{R})$ die Menge der integrierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$

  LEMMA: Die Abbildung

  $$\mathcal{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f \mapsto \int\limits_a^b f$$

  ist stetig.

  BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{R}$. Gesucht: Ein $\delta > 0$ mit

  $$\left| \int\limits_a^b - \int\limits_a^b g \right| \leq \varepsilon\; \forall\; g \in \mathcal{R} \text{ mit } \|f - g\|_D \leq \delta$$

  Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{b-a}$ gilt: Aus $|(f - g)(x)| \leq \delta\; \forall\; x \in D$ folgt: $\left|\int\limits_a^b (f - g)\right| \leq (b - a)\delta = \varepsilon$

20.3 $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

Definiere Normen für $\mathbb{R}^n$:

- 1-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j|$
- 2-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_j|^2}$

- (p-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}$)
- ∞-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty = \max\{|a_i| \mid i = 1, ..., n\}$

Bemerkung: $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

Also: Diese drei Normen sind äquivalent[47], aber die 2-Norm ist die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$, da $\|a\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ die Distanz zwischen 0 und a angibt und $\|a-b\|_2$ die Distanz zwischen a und b.

20.3.1 Konvergenz in jeder Komponente

Sei $V = \mathbb{R}^n$, sei $\|v\| := \|v\|_p$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

- Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ Schreibe $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$. Genau dann konvergiert $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $a = (a_1, ..., a_n)$, wenn $\lim_{i\to\infty} x_{ij} = a_j$ für $j = 1, ..., n$.

  Beweis: Es genügt, die ∞-Norm zu betrachten.

  „$\Leftarrow$" Voraussetzung: $\lim_{i\to\infty} x_{ij} = a_j$ für alle $j = 1, ..., n$. Sei $\varepsilon > 0$. Für $j = 1, ..., n$ und fast alle i ist $|a_j - x_{ij}| < \varepsilon$ Für diese i folgt:

  $$\|a - x_i\|_\infty = \max |a_j - x_{ij}| < \varepsilon$$

  „$\Rightarrow$" Voraussetzung: $\lim_{i\to\infty} x_i = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\|a - x_i\| < \varepsilon$ für fast alle i. Allgemein gilt für alle drei Normen: $\|(r_1, ..., r_n)\| \geq |r - j|$ für $j = 1, ..., n$. Es folgt:

  $$|a_j - x_{ij}| \leq \|a - x_i\| < \varepsilon\, f.f.a.\, i$$

- Analog gilt für einen metrischen Raum M und für Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^n$:

  $$\lim_{x\to u} f(x) = (a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow \lim_{x\to u} f_j(x) = a_j \;\forall\, j \in \{1, ..., n\}$$

  Dabei sind $f_1, ..., f_n$ die sogenannten *Koordinatenfunktionen* von f, definiert durch $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Zudem: Genau dann ist f stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen stetig sind.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge genau dann, wenn $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist für jedes $i \in 1, ..., n$.

[47] später folgt noch: alle Normen des $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

20.3.2 Vollständigkeit

$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

20.3.3 Bolzano-Weierstrass

In $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von Bolzano-Weierstrass, d.h. jede beschränkte Folge und jede beschränkte unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt. *Andere Formulierung:* Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist folgenkompakt.

Beweis: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, abgeschlossen. Dann existiert $r > 0$ mit $\|x\| \le r \; \forall \, x \in X$. Setze $W = \{ (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \mid |a_i| \le r \; \forall \, i\}$ (sozusagen ein n-dimensionaler Würfel um den Ursprung). Dann ist $X \subseteq W$. Es genügt zu zeigen: W ist folgenkompakt (denn X abgeschlossen).

Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in W. Will (20.3.1) anwenden. Dann ist $(x_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-r, r]$, hat also einen Häufungspunkt a_1 in $[-r, r]$ (denn $\mathbb{R}$ ist folgenkompakt). Dann ist a_1 Limes einer Teilfolge.

Ersetze $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die entsprechende Teilfolge. Dann ist a_1 Limes der Folge $(x_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$. Analog für $(x_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$, ersetze $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine Teilfolge, so daß $a_2 = \lim_{n\to\infty} x_{n2} \in [-r, r]$ existiert.

Ersetze analog für alle Koordinatenfolgen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine entsprechende Teilfolge, bis $a_1, a_2, ..., a_n \in [-r, r]$ existieren mit (nach (20.3.1)):

$$(a_1, ..., a_n) = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} (x_{i1}, ..., x_{in})$$

20.3.4 Satz vom Maximum und Minimum

Voraussetzung: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, beschränkt, abgeschlossen, nicht leer. $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.

Behauptung: $f(X)$ hat ein Maximum und ein Minimum. Beweis: X ist folgenkompakt nach (20.3.3), also ist $f(X)$ folgenkompakt (11.7), somit beschränkt und abgeschlossen (gilt allgemein in metrischen Räumen).

20.3.5 Äquivalenz aller $\mathbb{R}^n$-Normen

Satz: Alle Normen eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Raumes sind äquivalent.

Beweis: Es genügt, $\mathbb{R}^n$ zu betrachten. Sei N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die ∞-Norm, es genügt zu zeigen: N ist äquivalent zur ∞-Norm.

Setze $c = \sum_{i=1}^n N(e_i)$. Für $x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ folgt:

$$\begin{aligned} N(x) &\leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|\, N(e_i) \\ &\leq \max\{\, |x_i| \mid i = 1, ..., n\} \cdot \sum_{i=1}^n N(e_i) \\ &= \|x_i\| \cdot c \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$c > 0$, da $n \geq 1$, d.h. $\mathbb{R}^n \neq 0$. Wende (20.4) an, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq c \cdot \|x - y\|$$

Also: $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig[48] mit $L = c$ bezüglich der ∞-Norm.

Setze $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, W ist beschränkt und abgeschlossen. Damit hat $N(W)$ ein Minumum $N(u) =: d$ (nach (20.3.4)).

Wir haben $d > 0$, denn sonst wäre $u = 0$, also $0 = \|u\| = 1$.Für jedes Element $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} N(x) &= N\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= \Big|\|x\|\Big| \cdot N\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= \|x\| \cdot N\underbrace{\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\in W} \\ &\geq \|x\| \cdot d \end{aligned}$$

Erhalte:

$$d \cdot \|x\| \leq N(x) \leq c \cdot \|x\| \;\;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Also ist die Normfunktion N äquivalent zur ∞-Norm, damit sind alle Normen äquivalent.

20.4 Allgemeine Regel für normierte Räume

In normierten Räumen gilt:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

[48] „... das ist das Tollste, was es so an Stetigkeit gibt!“

Besser:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \le \|x - y\|$$

Diese Ungleichung bedeutet: Die Abbildung $V \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \|x\|$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} \|x\| & = & \|y + x - y\| \\ & \le & \|y\| + \|x - y\| \\ \Rightarrow \|x\| - \|y\| & \le & \|x - y\| \\ \Rightarrow \|y\| - \|x\| & \le & \|y - x\| \\ & = & \|x - y\| \end{array}$$

20.5 Vollständigkeit jedes endlichen normierten Raumes

Jeder endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

20.6 Differenzierbare und Integrierbare Funktionen

Sei $f : D \to V$ (wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ und V ein normierter Raum).

- Jedes $x \in D$ sei Häufungspunkt von D. Definition: Falls der Limes existiert, ist
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (f(x+h) - f(x))$$

- Sei $D = [a, b]$ und $I \in V$. Definition[49]:
$$\int_a^b f = I :\Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ mit } \Bigg\| I - \underbrace{\sum_i f(x_i) d_i}_{\text{Riemannsche Summe}} \Bigg\| \le \varepsilon$$
für jede Zerlegung $\mathcal{P} = \{\, P_i \mid i \in I \}$ von $[a, b]$ mit der Feinheit[50] kleinergleich δ und jede Wahl von $x_i \in P_i$.

[49] vergleiche hier mit (17.13)

[50] also $d_i = |P_i| \le \delta\ \forall\, i$

- Sei $V = \mathbb{R}^n$. Analog (20.3.1) ist f genau dann differenzierbar bzw. integrierbar, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, ..., f_n$ es sind, und es gilt:

$$f'(x) = (f_1'(x), ..., f_n'(x)) \text{ und } \int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, ..., \int_a^b f_n \right)$$

Die einfachsten Grundregeln bleiben richtig, ebenso der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Weiter[51]:

$$f' = 0 \Rightarrow f \text{ konstant}$$

20.7 Skalarprodukt

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Ein *positives definites Skalarprodukt* auf V ist eine symmetrische bilineare Abbildung

$$f : V \times V \to \mathbb{R} \text{ mit } f(v,v) \geq 0 \;\forall\, v \in V \text{ und } f(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Bezeichnung: $\langle u, v \rangle$ oder $u \cdot v$.

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$(a_1, ..., a_n) \cdot (b_1, ..., b_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Für jedes Skalarprodukt gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$(uv)^2 \leq (uu)(vv) \quad \text{bzw.} \quad \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

und folgendes ist eine Normfunktion auf V:

$$\|x\| = \sqrt{c \cdot c}$$

wobei dies im Falle des Standardskalarprodukts die 2-Norm ist. Dabei:

$$|uv| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

[51] „Wenn Sie sich nicht erinnern: Der Mittelwertsatz besagt, daß irgendso'n Punkt existiert, für den irgendwas gilt..."

- Noch ein Beispiel[52]: Sei $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (Menge der stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$). Definiere

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_a^b fg$$

Dann ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\left|\int\limits_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2 \int\limits_a^b g^2}$$

Die daraus abgeleitete Norm ist die L_2-Norm[53]:

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2}$$

[52] beachte (17.10)(b)

[53] In den Übungsaufgaben kam die L_1-Norm vor!

21 Die komplexen Zahlen

21.1 Definitionen

- $\mathbb{C}$ „=" $\mathbb{R}^2$ mit folgender Multiplikation mit Einselement $(1,0)$:

$$(a,b) \cdot (a',b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

- „identifiziere" $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0)$, dann ist $(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot i = a + bi$

- Die komplexen Zahlen bilden einen Körper $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper. Als $\mathbb{R}$-Raum hat $\mathbb{C}$ die Dimension 2. Es gibt ein $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Die Menge $\{1, i\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$.

- Notation:

$$z = x + iy \text{ mit } x = \operatorname{Re}(z) = \Re(z) \text{ und } x = \operatorname{Im}(z) = \Im(z) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

  Erhalte die komplexe Zahlenebene mit $\Re(z)$ als Abzisse und $\Im(z)$ als Ordinate.

- Die zu z *konjugiert komplexe Zahl* ist definiert als $\overline{z} = x - iy$. Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$.

- Der *Betrag* $|z| := |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist nichts anderes als die 2-Norm des $\mathbb{R}^2$. Zudem gilt:

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

  Es folgt sofort[54]: $|uv| = |u|\,|v| \;\forall\, u, v \in \mathbb{C}$

- Die *Polarkoordinaten* r, φ einer komplexen Zahl $z = a + bi$ mit

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \text{ und } \cos\varphi = \frac{a}{r}$$

  Zudem:

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \text{ und } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $\mathbb{C}$ wird als normierter Raum der Betragsfunktion $|\cdot|$ als Norm betrachtet.

- $\mathbb{C}$ ist vollständig, also auch ein Banachraum (denn $\mathbb{R}^2$ ist vollständig (20)).

[54]„Was sich herausstellt: Die Welt $\mathbb{C}$ ist eine viel schönere Welt als die Welt $\mathbb{R}$! Da herrscht viel mehr Harmonie und Ordnung!"

21.2 Differenzierbarkeit, Ableitung

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ und jedes $z \in D$ Häufungspunkt von D. Definition und Gundregeln genau wie für $\mathbb{R}$:

- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel analog
- $(z^n)' = nz^{n-1} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
- ist f differenzierbar, so ist f stetig

21.2.1 Konstante Funktion/Ableitung null

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $D = \mathbb{C}$ oder $D = \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG: Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

BEWEIS: Zu $u, v \in D$ definiere $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch:

$$g(x) = u + (v-u) \cdot x$$

Es gilt[55]: $g(0) = u$, $g(1) = v$ und $g'(x) = v - u$. Die Kettenregel liefert:

$$f(g(x))' = \underbrace{f'(g(x))}_{=0} \cdot g'(x) = 0$$

Die Funktion $f \circ g$ ist von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}(\simeq \mathbb{R}^2)$, konstant nach (20.6). Dann gilt:

$$f(u) = f(g(0)) = f(g(1)) = f(v)$$

ZUSATZ: Es genügt die folgende Eigenschaft von D: Für jedes $u, v \in D$ existiert eine Folge $u_0, ..., u_n$ in D mit $u_0 = u$ und $u_n = v$ mit der Eigenschaft

$$\{u_{i-1} + (u_i - u_{i-1}) \cdot x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subseteq D \; \forall \, i = 1, ..., n$$

Anschaulich: Jeder Punkt jeder Verbindungsstrecke zwischen zwei Folgegliedern u_{i-1} und u_i muß in D liegen.

[55] „Die Funktion ist differenzierbar, differenzierbarer geht's kaum!"

21.2.2 Differenzierbarkeitssatz für Funktionen in $\mathbb{C}$

VORAUSSETZUNG: Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $z \in D$; $f_n = \Sigma f_n$; $\Sigma f_n'(z)$ konvergent. Es existieren zudem $L_n \geq 0$ mit ΣL_n konvergent; gelte

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n \, |x - y| \quad \forall \, x, y \in D$$

BEHAUPTUNG: f ist differenzierbar in z mit $f'(z) = \Sigma f_n'(z)$.

BEWEIS: Genau wie für (16.8)

21.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$

- Alle Sätze über die absolute Konvergenz von reellen Potenzreihen bleiben gültig.
- Eine Potenzreihe

$$(P) \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$$

  hat einen Konvergenzradius und einen *Konvergenzkreis* $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$.
- Die Potenzreihe (P) konvergiert auf K absolut, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |z - z_0|^n \text{ konvergiert}$$

- Erhalte insbesondere die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots
\end{aligned}$$

- Offenbar gilt die *Eulersche Gleichung*:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$$

- Die Funktionen e^z, $\sin z$ und $\cos z$ sind differenzierbar mit den gewohnten Ableitungen.

21.3.1 Ableitung von Potenzreihen in $\mathbb{C}$

VORAUSSETZUNG: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und abgeschlossen. Definiere die Reihen

$$(P)\ f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } (P')\ g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

BEHAUPTUNG: Konvergiert (P') absolut für jedes $z \in D$, so konvergiert auch (P) für alle $z \in D$ absolut. Zudem ist die Funktion f differenzierbar auf D mit Ableitung g.

BEWEIS: Genau wie für (15.10), dort war $D = [a, b]$ und es wurde benötigt:

$$\exists\, u \in D \text{ mit } |x| \le |u|\ \forall\, x \in D$$

Dies bleibt für D hier richtig wegen des Satzes von Maximum und Minimum, da $x \to |x|$ stetig ist.

Konsequenz: Im Komplexen gelten dieselben Sätze über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen wie im Reellen.

21.4 Exponential- und Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$

21.4.1 Funktionen mit konstantem Verhältnis

VORAUSSETZUNG: Seien $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ mit $D = \mathbb{R}$ oder $D = \mathbb{C}$. Seien $f' = f$ und $g' = g$.

BEHAUPTUNG: Es existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = cg(z)\ \forall\, z \in D$.

BEWEIS: Es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} = \frac{gf - fg}{g^2} = 0$$

Nach (21.2.1) ist damit $\frac{f}{g}$ konstant, also existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f = c \cdot g$.

21.4.2 Summenregel für Exponential-Funktion

BEHAUPTUNG: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \neq 0$$

BEWEIS: Für festes y existiert nach eben bewiesenem Satz ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\underbrace{e^{x+iy}}_{f(x)} = c \underbrace{e^x}_{g(x)}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Also $e^{iy} = f(0) = ce^0 = c \cdot 1 = c$. Zudem folgt mit der Eulerschen Gleichung: Es existiert kein $y \in \mathbb{R}$ mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, damit ist

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \underbrace{(\cos y + i \cdot \sin y)}_{\neq 0} \neq 0$$

21.4.3 Hauptsatz

BEHAUPTUNG:

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v \; \forall \; u, v \in \mathbb{C}$$

BEWEIS: Wende (21.4.1) an mit $g(z) = e^z$ und $f(z) = e^{u+z}$ für ein festes u, sei jeweils $D = \mathbb{C}$. Erhalte $c \in \mathbb{C}$ mit $e^{u+v} = ce^z \; \forall \; z \in D$. Also: $e^u = ce^0 = c$, damit gilt:

$$e^{u+z} = \underbrace{e^u}_{c} \cdot e^z \; \forall \; z \in \mathbb{C}$$

21.4.4 Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

BEHAUPTUNG: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|e^z| = e^x \text{ und } \left|e^{iy}\right| = 1$$

BEWEIS: Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ ist stetig. Für jede konvergenze komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und für jede Reihe gilt daher:

$$\overline{\lim_{n\to\infty} z_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{z_n} \quad \text{und} \quad \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n$$

Also folgt für die Exponentialfunktion:

$$\overline{e^{x+iy}} = \overline{e^z} = e^{\overline{z}} = e^{x-iy}$$

Damit gilt:

$$\left|e^{iy}\right|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{\overline{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy+(-iy)} = e^0 = 1$$

Weiter:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow |e^z| = |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| = 1 \cdot e^x$$

21.4.5 Hilfssatz

Voraussetzung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Behauptung: Es existiert genau ein $y \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos y$ und $b = \sin y$, damit ist

$$e^{iy} = a + bi$$

Beweis: Folgt sofort aus $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und dem Funktionsverlauf von sin und cos.

21.4.6 Periodizität der Exponentialfunktion

Satz: Die Abbildung $y \mapsto e^{iy}$ ist bijektivon (sic!) $[0, 2\pi)$ auf $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (der Einheitskreis)

21.4.7 Bild der Exponentialfunktion

Die Abbildung

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } exp : z \mapsto e^z$$

ist periodisch mit Periode $2\pi \cdot i$. Auf dem „Streifen" $\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im(z) < 2\pi\}$ ist sie bijektiv, d.h. injektiv mit Bild $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis: Zur Periode:

$$e^{z+2\pi \cdot i} = e^z \cdot e^{2\pi \cdot i} = e^z \cdot \underbrace{(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}_{=1} = e^z$$

Zur Bijektivität: Sei $0 \neq u \in \mathbb{C}$. Schreibe $u = r \cdot v$ mit $r = |u|$, also $|v| = 1$. Dann eixsitert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $r = e^x$. Außerdem existiert nach (21.4.6) genau ein $y \in [0, 2\pi)$ mit $v = e^{iy}$. Es folgt:

$$u = r \cdot v = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

21.4.8 Logarithmusfunktion

- Als komplexe Logarithmusfunktion läßt sich nun die Umkehrfunktion $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \leq 0 \to S$ definieren, wobei $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(z) < 2\pi\}$. Anstelle von S kann man jeden analogen „Streifen" der Höhe 2π verwenden, zum Beispiel $S' = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im(z) < \pi\}$ etc.

- Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$a^z = e^{z \cdot \log a} \text{ mit } \log a \in \mathbb{R}$$

- Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ ist $e^{n \cdot u} = e^{u+u+\ldots+u} = (e^u)^n$, gilt auch für $n \in \mathbb{Z}$.

21.4.9 Wurzeln im Komplexen

- Da $e^u = \left(e^{\frac{u}{n}}\right)^n$ gilt, hat jede komplexe Zahl für $n \in \mathbb{N}$ eine n-te Wurzel.
- Die Zahlen
$$\varepsilon_j = e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot i}{n}} \ \forall \ j = 1, ..., n$$
sind paarweise verschiedene n-te Einheitswurzeln mit $\varepsilon_j^n = 1$. Folglich gilt die Polynomgleichung
$$x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n}(x - \varepsilon_i)$$
und analog mit $b^n = a \in \mathbb{C}$ und $a_j := \varepsilon_j \cdot b$
$$x^n - a = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$$
- „Fundamentalsatz“„kein Mensch mit mathematischem Verständnis versteht das...“ der Algebra: Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle (ist also Produkt von linearen Polynomen)

22 Multiplikation und Norm

Es geht um normierte Algebren, insbesondere Banachalgebren. Seien U, V, W immer normierte Räume, die Norm wird im Folgenden z.T. mit $|\cdot|$ statt mit $\|\cdot\|$ bezeichnet.

22.1 Definitionen

- Definition: Nenne eine bilineare Abbildung $U \times V \to W$ mit $(u,v) \mapsto uv$ *normverträglich* genau dann, wenn

  $$\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \ \forall\, u \in U, v \in V$$

  Beispiel: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Allgemeiner: $U = V$ sind $\mathbb{R}$-Räume mit positiv definitem Skalarprodukt.

- Beispiele für normverträgliche bilineare Abbildungen: Sein $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge der stetigen linearen Abbildungen.

  1. $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \times V \to W$ mit $\varphi : (\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$
  2. $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(U, V) \to \mathcal{L}(U, W)$ mit $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$

     Zu zeigen: $|\alpha \circ \beta| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$, für alle $x \in U$ gilt:

     $$|(\alpha \circ \beta)x| = |\alpha(\beta(x)| \leq |\alpha| \cdot |\beta(x)| \leq |\alpha|\,|\beta|\,|x|$$

- Definition: Eine normierte Algebra ist ein normierter Raum A zusammen mit einer normverträglichen bilinearen Multiplikation $A \times A \to A$.

- Definition: A heißt Banachalgebra, falls A als normierter Raum vollständig ist, d.h. ein Banachraum.

  Beispiel:

  1. Raum der beschränkten Funktionen: $A := \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ mit D beliebige Menge, sei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm. Beweis der Normverträglichkeit:

     $$|f(x)| \leq \|f\| \ \forall\, x \in D \text{ und } |g(x)| \leq \|g\| \ \forall\, x \in D$$

     $$\Rightarrow |(fg)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

     $$\Rightarrow \|fg\| = \sup\{\, |(fg)(x)| \mid x \in D\} \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

     Damit ist A eine Banachalgebra nach (20.2).

2. Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $A := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ist eine Teilalgebra von $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ und ebenfalls eine Banachalgebra.

- Hauptanwendungen der Regel $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ zum Beispiel:

  1. Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit den Limites u und v, dann folgt: $\lim u_n v_n = uv$
  2. analog für Funktionen
  3. Produktregel: Seien $f : D \to U$ und $g : D \to V$, beide differenzierbar, dann ist $fg : D \to W$ differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$

22.2 Stetigkeit einer linearen Abbildung

Voraussetzung: $\alpha : V \to W$ linear[56].

Behauptung: Äquivalent sind:

(a) α ist stetig in 0

(b) Es existiert $c > 0$ mit $\|\alpha(x)\| \leq c \cdot |x| \;\; \forall\, x \in V$

(c) α ist Lipschitz-stetig

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b) Es existiert $\delta > 0$ für $\varepsilon = 1$ mit $\|\alpha(x) - \alpha(0)\| \leq 1 \;\forall\, x \in V$ mit $|x| \leq \delta$. Dann folgt für alle $0 \neq x \in V$:

$$\|\alpha(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} \cdot \left\| \alpha\left(\delta \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta} \cdot 1$$

Damit gilt die Bedingung mit $c = \frac{1}{\delta}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|\alpha(x-y)\| \leq c\,\|x-y\|$$

(c) $\Rightarrow$ (a) trivial

[56] „Es ist manchmal im Leben und auch in der Mathematik besser, man weiß gar nicht so viel!“

22.2.1 endlichdimensionale lineare Abbildungen

VORAUSSETZUNG: Sei V endlichdimensional.

BEHAUPTUNG: α ist Lipschitz-stetig.

BEWEIS: Darf $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und $\|\cdot\|$ als ∞-Norm annehmen. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Setze

$$c = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(e_i)\|$$

Dann läßt sich (22.2) anwenden: Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\alpha(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha(e_i) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| \, \|\alpha(e_i)\|) \\ &\leq \max\{\, \|x_i\| \mid i = 1, ..., n\} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\|\alpha(e_i)\|) \\ &\leq \|x\| \cdot c \end{aligned}$$

22.2.2 Beispiel für nicht-stetige Abbildung

Seien V, W die folgenden normierte Räume bezüglich der Supremumsnorm:

$$V = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \text{ und } W = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$$

Betrachte die folgende Abbildung:

$$\alpha : V \to W \text{ mit } \alpha : f \mapsto f'$$

Annahme: α ist stetig. Dann existiert $c > 0$ mit $|\alpha(f)| \leq c \cdot |f| \;\; \forall\; v \in V$. Betrachte die Funktionenfolge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_n(x) = x^n \in V \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist $|f_n| = 1$, aber damit ist

$$\|\alpha(f_n)\| = \|f_n'\| = n \cdot \left\|x^{n-1}\right\| = n \leq c\,\|f_n\| = c \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch, damit ist α nicht stetig.

22.2.3 Algebra der stetigen Endomorphismen

Sei V ein normierter Raum. Dann ist $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ bezüglich der Operatornorm in (22.3) eine normierte Algebra, bei endlichdimensionalem V sogar eine Banachalgebra. Es gilt: $|id_V| = 1$

22.3 Die Operatornorm

Voraussetzung: Sei $\mathcal{L}(V, W)$ der $\mathbb{R}$-Raum der stetigen linearen Abbildungen $\alpha : V \to W$. Behauptung: Die sog. Operatornorm ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V, W)$:

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &:= \inf \{ c \geq 0 \mid \|\alpha(x)\| \leq c \|x\| \ \forall\, x \in V \} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \,\middle|\, x \in V \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \{ \|\alpha(y)\| \mid y \in V \setminus \{0\} \text{ mit } |y| \leq 1 \} \end{aligned}$$

Beweis:

1. $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow |\alpha(x)| = 0 \, \forall\, x \in V \Rightarrow \alpha = 0$
2. $\|k\alpha\| = k \|a\| \ \forall\, k \in \mathbb{R}$
3. Gilt $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$? Es ist $|\alpha(x)| \leq \|\alpha\| \cdot |x| \ \forall\, x \in V$, damit folgt:

$$\begin{aligned} |(\alpha + \beta)(x)| &= |\alpha(x) + \beta(x)| \\ &\leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| \\ &\leq \|\alpha\| \, |x| + \|\beta\| \, |x| \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|) \, |x| \end{aligned}$$

22.3.1 Operatornorm des Matrizenraumes

Vorbemerkung: Sei $\mathbb{R}_{m,n}$ der Raum der $m \times n$-Matrizen (in LinAlg: $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$). Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gehöre zu $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die $m \times n$-Matrix A.

Achtung: In der Analysis sind im Vergleich zur Linearen Algebra die Rolle der Zeilen und Spalten vertauscht, da die Abbildung von links und nicht von rechts geschrieben wird. Daher auch $m \times n$-Matrizen und nicht $n \times m$. !

Für $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\alpha v = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r \in \mathbb{R}^m$$

Erhalte zu gegebenen Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Operatornorm auf $\mathbb{R}_{m,n}$ so:

$$\|A\| = \inf\{c \geq 0 \mid \|A \cdot v\| \leq c \cdot \|v\| \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n\}$$

Damit hängt die Operatornorm von den Normen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ab, z.B. bei ∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$: Erhalte die *Zeilensummennorm* auf $\mathbb{R}_{m,n}$:

$$\|(a_{ij})_{m\times n}\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \middle|\ i = 1, ..., m\right\}$$

22.4 Potenzreihen in einer Banachalgebra

Sei A eine Banachalgebra, z.B. $\mathbb{R}_n$. Betrachte eine Potenzreihe

$$(P)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ mit } a_n \in A$$

DEFINITION:

- Konvergenzradius[57] := Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum |a_n|\, x^n$
- Konvergenzkreis $K := \{x \in A \mid |x| < r\}$

Dann konvergiert (P) absolut für jedes $x \in K$ (da $|a_n x^n| \leq |a_n|\,|x|^n \leq |a_n|\, s^n$ für jedes s mit $|x| \leq s < r$).

22.4.1 Hauptbeispiele

1. Die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ konvergiert absolut für alle $x \in A$ mit $|x| < 1$, falls A ein Einselement mit Norm 1 hat.

   Weiter: $(1 + x + x^2 + ...)(1 - x) = 1$, insbesondere ist $1 - x$ in A invertierbar.

2. Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvertiert„die Reihe konvergiert ja für jedes Dingsbums“ für jedes $x \in A$ absolut, bezeichnet die Summe mit e^x. Regel:

   $$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \ \forall\, x, y \in A \text{ mit } xy = yx$$

   Insbesondere ist $e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

3.

[57] „... Potenzradius ...“

22.5 Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum u_n$ und $\sum v_n$ zwei Reihen (etwa in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder einer Banachalgebra). Das Cauchyprodukt der Reihen ist $\sum w_n$ mit

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$$

22.5.1 absolute Konvergenz

Seien $\sum u_n$ und $\sum v_n$ zwei absolut konvergente Reihen mit den Summen u und v, dann ist das Cauchyprodukt $\sum w$ absolut konvergent mit der Summe uv. Für Potenzreihen heißt das:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^x n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

22.5.2 Anwendung

Satz: Sei A eine Banachalgebra mit Einselement 1 und $|1| = 1$. Seien $x, y \in A$ mit $xy = yx$. Dann ist

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Beweis: Es ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n} \text{ und } e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^n}{n!}}_{v_n} \text{ sowie } e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(x+y)^n}{n!}}_{w_n}$$

Zu zeigen: $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^n}{n!} &= \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}\right) x^i y^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{x!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}
\end{aligned}$$

Naiv: $(\sum u_n)(\sum v_n) = \underbrace{\sum_{i,j} u_i v_j}_{\text{sinnlos}}$, siehe Ergänzungsvorlesung

23 Partielle und totale Differenzierbarkeit

23.1 Offene Mengen

VORAUSSETZUNG: Sei M ein metrischer Raum und $X \subseteq M$.

DEFINITION: X ist *offen* (im M) genau dann, wenn für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung $U(x)$ um, so daß $U \subseteq X$, d.h. x ist ein innerer Punkt. Damit ist X eine Umbegung von x.

BEISPIELE:

1. Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$
2. ε-Umgebungen in metrischem Raum M

REGELN:

1. Jede Vereinigung von offenen Mengen $\subseteq M$ ist offen.
2. Jeder Schnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
3. X ist offen genau dann, wenn $M \setminus X$ abgeschlossen ist.
4. Für $X_0 \subseteq M_0 \subseteq M$ gilt: X_0 ist offen in M_0 genau dann, wenn ein X existiert, das offen in M ist und für das gilt: $X_0 = M_0 \cap X$.
5. $f : M \to N$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $Y \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(Y)$ ist offene Menge in M.

BEWEIS:

5. f ist stetig in a genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(a)$ eine Umgebung V von a existiert mit $f(V) \subseteq U$, d.h. $V \subseteq f^{-1}(U)$.

23.2 Partielle Ableitungen

Beispiel und Mutivation (sic!): betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \mapsto x^2 \cdot y^2$$

und für festes $y \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto x^2 \cdot y^2$$

Dann ist $g'(x) = 2xy^2$. Dies ist beim Differenzieren „nach x“ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f : (x, y) \mapsto 2xy^2$$

Sei $u = (x, y)$. Dann ist

$$g'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+te_1) - f(u)}{t} \text{ mit } e_1 = (1, 0)$$

DEFINIERE nun zu $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\{e_1, y..., e_n\}$ die Standardbasis) die *partiellen Ableitungen* $D_1 f, D_2 f, ..., D_n f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D_i f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+te_i) - f(u)}{t}$$

Die Funktion f ist *partiell differenzierbar* genau dann, wenn $D_i f(u)$ existiert für alle i und $u \in \Omega$. Die Funktion f ist *stetig partiell differenzierbar* genau dann, wenn f partiell differenzierbar ist und $D_i f$ stetig ist für $i = 1, ..., n$. Der *Gradient* von f ist das Tupel $(D_1 f, D_2 f, ..., D_n f)$, im Punkt u: $(D_1 f(u), ..., D_n f(u))$. BEISPIEL:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x + x^2 y + \sin xy \\
\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(x,y) &= 1 + 2xy + y \cdot \cos xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(x,y) &= x^2 + x \cdot \cos xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{12} f(x,y) &= 0 + 2x + xy \cdot (-\sin xy) + \cos xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{21} f(x,y) &= 2x + xy \cdot (-\sin xy) + \cos xy
\end{aligned}$$

23.2.1 Richtungsableitung

Sei $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *Richtungsableitung*

$$D_e f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+te) - f(u)}{t}$$

23.3 Allgemeine Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Seien V, W normierte Räume und $\Omega \subseteq V$ offen. Sei $a \in \Omega$ und $f : \Omega \to W$.

BEHAUPTUNG: Es gibt höchstens eine $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha(h)}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

DEFINITION: Nenne f differenzierbar in a genau dann, wenn $\alpha : V \to W$ existiert. Schreibe

$$f'(a) = \alpha \text{ und } Df(a) = \alpha$$

Erhalte, wenn das für alle $a \in \Omega$ gilt, die *Ableitung* $f' : \Omega \to \mathcal{L}(V, W)$ (also Df). Umformulierungen[58] von $(*)$:

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + |h| \cdot \psi(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \psi(h) = 0 \qquad (**)$$

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + |h| \cdot \psi(h) \text{ mit } \psi(0) = 0 \text{ und } \psi \text{ stetig in } 0 \qquad (***)$$

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + \omega(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot \omega(h) = 0 \qquad (****)$$

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + o(h)^{59} \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot o(h) = 0 \qquad (*****)$$

Triviale Regeln:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(kf)' = k(f')$
3. f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig

BEWEIS für die Eindeutigkeit von α: Sei $\beta \in \mathcal{L}(V, W)$ wie α, und setze $\gamma = \alpha - \beta \in \mathcal{L}(V, W)$. Erhalte aus $(*)$::

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h) - \beta(h)}{|h|} = 0 \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(h)}{|h|}$$

Für jedes $0 \neq v \in V$ folgt, wenn für $t \in \mathbb{R}$ gilt, daß $\lim_{t \to 0} tv = 0$:

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{\gamma(tv)}{|tv|} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \left| \frac{\gamma(v)}{|v|} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\gamma(v)}{|v|} \right| = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Damit ist $\gamma = 0 = \alpha - \beta$, also $\alpha = \beta$.

---

[58] „Sternchen haben wir ja genug!“

[59] „klein $o(h)$“, wobei Regeln gelten wie $o(h) + o(h) = o(h)$ und $g(h) \cdot o(h) = o(h)$ für beschränkte g.

23.4 Ableitungsregeln

23.4.1 Die Produktregel

Seien V, W, W_1, W_2 normierte Räume und $\Omega \subseteq V$ offen. Benutze eine bilineare, bistetige[60] Multiplikation $W_1 \times W_2 \to W$ mit $(x, y) \mapsto xy$. Betrachte zwei differenzierbare Funktionen $f : \Omega \to W_1$ und $g : \Omega \to W_2$.

Behauptung:

$$fg : \Omega \to W \text{differenzierbar mit } (fg)' = fg' + f'g$$

Beweis: Sei $a \in \Omega$, $f'(a) = \alpha$ und $g'(a) = \beta$. Die folgende Abbildung γ ist linear und stetig:

$$\gamma : V \to W \text{ mit } \gamma(h) = f(a)\beta(h) + \alpha(h)g(a)$$

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \alpha(h) + o(h) \\
g(a+h) &= g(a) + \beta(h) + o(h) \\
(fg)(a+h) &= (f(a) + \alpha(h) + o(h)) \cdot (g(a) + \beta(h) + o(h)) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + \underbrace{o(h) \cdot g(a) + o(h) \cdot \beta(h) + o(h) \cdot o(h) + f(a) \cdot o(h) + \alpha(h) \cdot o(h)}_{=o(h)} + \alpha(h) \cdot \beta(h) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + o(h) + \alpha(h) \cdot \beta(h) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + o(h)
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da $\alpha(h) \cdot \beta(h) = o(h)$, denn $\frac{\alpha(h)}{|h|} \cdot \beta(h) \to 0$.[61]

23.4.2 Die Kettenregel

Seien V, V, W normierte Räume. Sei $\Omega_U \subseteq U$ offen, sei $\Omega_V \subseteq V$ offen. Sei $g : \Omega_U \to \Omega_V$, sei $f : \Omega_V \to W$. Sei $a \in \Omega_U$ mit $b := g(a) \in \Omega_V$. Seien

$$g'(a) = \beta \in \mathcal{L}(U, V) \text{ und } f'(b) = \alpha \in \mathcal{L}(V, W)$$

Behauptung: $f \circ g : \Omega_U \to W$ ist differenzierbar mit

$$(f \circ g)' = \alpha \circ \beta \text{ und } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a)$$

Beweis: Mit $q(h) = g(a+h) - g(a) = \beta(h) + o(h)$ gilt mit $\lim_{x \to 0} \psi(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(b + q(h)) - f(b) \\
&= \alpha(q(h)) + |q(h)|\, \psi(q(h)) \\
&= \alpha(\beta(h)) + \alpha(o(h)) + |q(h)|\, \psi(q(h))
\end{aligned}$$

[60] allgemeiner als „normverträglich“

[61] Annika hat'n Virus! :o)

Es bleibt zu zeigen: $\alpha(o(h))$ „=“ $o(h)$ und $|q(h)|\,\psi(q(h))$ „=“ $o(h)$. Betrachte Grenzwerte für $h \to 0$:

$$\frac{\alpha(o(h))}{|h|} = \alpha\left(\frac{o(h)}{|h|}\right) \to \alpha(0) = 0 \text{ und } \underbrace{\frac{|q(h)|}{|h|}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\psi(q(h))}_{\to 0} \to 0$$

wobei die Beschränktheit folgt aus $\frac{|q(h)|}{|h|} = \frac{|\beta(h)+o(h)|}{|h|}$.

23.5 Ableitung in allen Komponenten

VORAUSSETZUNG: Seien $V, W = \mathbb{R}^m$ normierte Räume, $\Omega \subseteq V$ offen, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to W$, $f_1, ..., f_m$ die Koordinatenfunktionen.

BEHAUPTUNG:

1. f ist differenzierbar in a genau dann, wenn f_i differenzierbar ist in a für $i = 1, ..., m$

2. Ist $\alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(V, W)$ und sind $\alpha_1, ..., \alpha_m$ die Koordinatenfunktionen von α, so ist $\alpha_i = f_i'$

BEWEIS: Für $\alpha : V \to W$ mit Koordinatenfunktionen $\alpha_1, ..., \alpha_m$ und $\omega : U \to W$ mit Koordinatenfunktionen $\omega_1, ..., \omega_m$ (wobei $U = U(0) \subseteq V$) gilt:

1. $f(a+h) - f(a) = \alpha(a) + \omega(h) \;\forall\; h \in U \Leftrightarrow f_i(a+h) - f_i(a) = \alpha_i(a) + \omega_i(h) \;\forall\; h \in U, i = 1, ..., m$

2. α ist linear und stetig genau dann, wenn $\alpha_1, ..., \alpha_m$ linear und stetig sind nach (20.3.1).

3. $\lim_{h\to 0} \frac{\omega h}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\omega_i h}{\|h\|} = 0 \;\forall\; i = 1, ..., m$

Beide Behauptungen sind damit erledigt.

23.6 allgemeine $\Rightarrow$ partielle Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Sei V normierter Raum, $\Omega \subseteq V$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $a \in \Omega$ und $\alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

BEHAUPTUNG: Für jedes $e \in V \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $D_e f : \Omega \to \mathbb{R}$ und es ist $D_e f(a) = \alpha e$.

Insbesondere existieren im Fall $V = \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen $D_1 f, ..., D_n f$ mit $D_i f(a) = \alpha e_i$, wobei $e_1, ..., e_n$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

BEWEIS: Wegen $\lim_{t\to 0} te = 0$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-\alpha h}{\|h\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)-\alpha(te)}{\|te\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)-t\cdot\alpha e}{t} \\ \Rightarrow \alpha e = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\alpha e}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t} = D_e f(a) \end{aligned}$$

23.7 Jacobi-Matrix

VORAUSSETZUNG: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in \Omega$ mit den Koordinatenfunktionen $f_i, ..., f_m$. Sei

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ Matrix von } \alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

BEHAUPTUNG:

$$a_{ij} = D_j f_i(a)$$

Das heißt, die i-teZeile von A ist der Gradient der i-ten Koordinatenfunktion von f.

DEFINITION: Die Matrix $A = (a_{ij})_{m\times n}$ mit $a_{ij} = D_j f_i(a)$ heißt *Jacobi-Matrix*, auch *Funktionalmatrix* von f an der Stelle a.

BEWEIS: Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Nach (23.5) ist $f_i' = \alpha_i$, nach (23.6) ist $D_j f_i(a) = \alpha_i e_j = a_{ij}$.

23.8 Partielle ⇒ totale Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.

BEHAUPTUNG: f ist differenzierbar.

BEWEIS: Nur für $n = 2$, Rest analog. Die Norm auf $\mathbb{R}^n$ darf beliebig gewählt werden. Wähle sie so, daß

$$\|(x, y)\| \geq |x|\,|y| \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sei nun $a = (a_1, a_2)$ und U eine ε-Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ mit $a+h \in \Omega\ \forall\ h \in U$. Schreibe für $h = (h_1, h_2) \in U$:

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2)}_{:=S} + \underbrace{f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)}_{:=T}$$

Es existiert $c_1 = c_1(h) \in \mathbb{R}$ zwischen a_1 und $a_1 + h_1$ mit

$$S = D_1 f(c_1, a_2 + h_2) \cdot h_1 \tag{2}$$

Beweis zu (2):

Darf $h_1 \neq 0$ annehmen. Setze

$$I := \begin{cases} [a_1, a_1 + h_1] & \text{falls} \quad h_1 > 0 \\ [a_1 + h_1, a_1] & \text{falls} \quad h_1 < 0 \end{cases}$$

Für alle $x \in I$ ist $(x, a_2 + h_2) \in \Omega$. Die Funktion

$$g : I \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x, a_2 + h_2)$$

ist differenzierbar mit $g'(x) = D_1 f(x, a_2 + h_2)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung existiert $c_1 \in I$ mit $g(a_1 + h_1) - g(a_1) = g'(c_1) \cdot h_1$

Es existiert $c_2 = c_2(h) \in \mathbb{R}$ zwischen a_2 und $a_2 + h_2$ mit

$$T = D_2 f(a_1, c_2) \cdot h_2 \tag{3}$$

Beweis analog zu (2).

Definiere Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : U \to \mathbb{R}$ durch

$$D_1 f(c_1(h), a_2 + h_2) = D_1 f(a) + \varphi_1(h) \text{ und } D_2 f(a_1, c_2(h)) = D_2 f(a) + \varphi_2(h)$$

Die Funktionen φ_1, φ_2 sind stetig in 0. Wir haben $\lim_{h \to 0}(c_1(h), a_2 + h_2) = (a_1, a_2) = a$.

Da nach Voraussetzung $D_1 f$ stetig ist (also auch stetig in a), folgt $\lim_{h \to 0} D_1 f(c_1(h), a_2 + h_2) = D_1 f(a)$. Also ist

$$\lim_{h \to 0} \varphi_1(h) = 0 = \varphi_1(0)$$

Damit ist φ_1 stetig in 0. Wir haben:

$$f(a + h) - f(a) = T + S = \underbrace{D_1 f(a) h_1 + D_1 f(a) h_2}_{:=\alpha(h)} + \underbrace{\varphi_1(h) h_1 + \varphi_2(h) h_2}_{:=\omega(h)}$$

Erhalte lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Für $\omega : U \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h_1}{|h|} \varphi_1(h) + \frac{h_2}{|h|} \varphi_2(h) \right) = 0$$

wegen $\lim_{h \to 0} \varphi_i(h) = 0$ und $\left| \frac{h_i}{h} \right| \leq$. (?!)

23.9 Satz von Schwarz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, d.h. die partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f, D_{12} f, D_{21} f$ existieren und sind stetig.

BEHAUPTUNG:

$$D_{12} f = D_{21} f$$

BEMERKUNG: Die Existenz von $D_{21} f$ braucht nicht vorausgesetzt zu werden.

BEWEIS: Wähle die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. Sei U eine ε-Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^2$ mit $a + U \subseteq \Omega$. Sei $h = (h_1, h_2) \in U \setminus \{0\}$. Setze

$$\begin{aligned} T = T(h) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)) \\ &= g(a_1 + h_1) - g(a_1) \text{ mit } g(x) := f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2) \end{aligned}$$

Die Funktion g ist definiert für alle $x \in (a_1, a_1 + h)$. Mit Mittelwertsatz existiert $c_1 = c_1(h) \in (a_1, a_1 + h_1)$ mit

$$T = \underbrace{(D_1 f(c_1, a_2 + h_2) - D_1 f(c_1, a_2))}_{=:s} h_1$$

Analoge Anwendung des Mittelwertsatzes: Es existiert $c_2 = c_2(h) \in (a_2, a_2 + h_2)$ mit $S = D_2 D_1 f(c_1, c_2) h_2$. Also:

$$T = D_2 D_1 \underbrace{f(c_1, c_2)}_{f(c(h))} h_2 h_1 \text{ mit } \lim_{h \to 0} c(h) = (a_1, a_2)$$

Analog ist

$$T = D_1 D_2 f(d(h)) h_2 h_1 \text{ mit } \lim_{h \to 0} d(h) = (a_1, a_2)$$

Erhalte $D_2 D_1(f(c(h))) = D_1 D_2 f(d(h)) =: F(h)$ wegen

$$D_2 D_1 f(a) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{h \to 0} F(h) \overset{\text{stetig}}{=} D_1 D_2 f(a)$$

23.10 allgemeiner Satz von Schwarz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar.

BEHAUPTUNG: Eine k-te partielle Ableitung $D_{j_1} D_{j_2} ... D_{j_k} f$ ist von der Reihenfolge der Indizes j_i unabhängig.

BEWEIS: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \geq 2$. Betrachte

$$D_{j_1} ... D_{j_s} D_{j_{s+1}} ... D_{j_k} f$$

Nach (23.9) dürfen D_{j_s} und $D_{j_{s+1}}$ vertauscht werden.

24 Zusammenhang

Frage: Welche Teilmengen eines normierten Raumes spielen die Rolle der Intervalle in $\mathbb{R}$?

24.1 Definition

VORAUSSETZUNG: Sei M metrischer Raum.

DEFINITION: Folgendes ist äquivalent:

- M zusammenhängend
- Die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M sind $\emptyset$ und M.
- $M = \underset{\text{offen}}{X} \uplus \underset{\text{offen}}{Y} \Rightarrow X = \emptyset \vee Y = \emptyset$

Eine Teilmenge T von M ist (als metrischer Raum) zusammenhängend genau dann, wenn

$$T = (\underset{\text{offen}}{X} \cap T) \uplus (\underset{\text{offen}}{Y} \cap T) \Rightarrow (X \cap T) = \emptyset \vee (Y \cap T) = \emptyset$$

24.2 Zusammenhänge in $\mathbb{R}$

VORAUSSETZUNG: Sei $T \subseteq \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG: T ist zusammenhängend genau dann, wenn T intervall ist.

BEWEIS:

„$\Rightarrow$" Angenommen, T sei kein Intervall. Dann existieren $x, y \in T$ und $a \notin T$ mit $x < a < y$. Setze $X = (-\infty, a) = \mathbb{R}_{<a}$ und $Y = (a, +\infty) = \mathbb{R}_{>a}$. X und Y sind offen in $\mathbb{R}$,

$$T \subseteq X \uplus Y \text{ mit } T = (T \cap X) \uplus (T \cap Y)$$

Damit ist T nich zusammenhängend, Widerspruch!

„$\Leftarrow$" Angenommen, T sei nicht zusammenhängend. Dann existieren $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $T = \underbrace{(X \cap T)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap T)}_{\neq 0}$. Wähle $x \in X \cap T$ und $y \in Y \cap T$. O.B.d.A. ist $x < y$, setze $s = \sup X$. Es folgt: $x \leq s \leq y$, daher $s \in T$. Also ist $x \in X$ oder $s \in Y$.

Es existiert eine Umgebung von s in $\mathbb{R}$ mit $U \subseteq X$ oder $U \subseteq Y$, Widerspruch zur Wahl von s!

Behauptung: $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend, d.h. die Zusammenhangskomponenten sind 1-Elementig.

Beweis: Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$; $x, y \in A$, $x < y$. Dann existiert $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$. Setze $X = \mathbb{R}_{<r}$ und $Y = \mathbb{R}_{>r}$ (beide offen). Es gilt:

$$A = \underbrace{(A \cap X)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(A \cap Y)}_{\neq 0}$$

Damit ist A nicht zusammenhängend.

24.3 allgemeiner Zwischenwersatz

Voraussetzung: Seien M, N metrische Räume. Sei $f : M \to N$ stetig.

Behauptung:

1. $f(M)$ ist zusammenhängend.
2. $N = \mathbb{R} \Rightarrow f(M)$ ist ein Intervall

Beweis: Annahme, $f(M)$ sei nicht zusammenhängend. Dann existieren $X_{\text{offen}}, Y_{\text{offen}} \subseteq f(M)$ mit $f(M) = X \uplus Y$. Es folgt: $M = f^{-1}(X) \uplus f^{-1}(Y)$. Nach (23.1) ist $f^{-1}(X)$ offen in M, $f^{-1}(Y)$ ebenfalls, also ist M nicht zusammenhängend, Widerspruch!

24.4 Vereinigung von Zusammenhängen

Voraussetzung: Seien $S, T \subseteq M$ zusammenhängende Teilmengen mit $S \cap T \neq 0$.

Behauptung: $S \cup T$ ist zusammenhängend.

Beweis: Annahme, $S \cup T$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren $X_{\text{offen}}, Y_{\text{offen}} \subseteq M$ mit

$$S \cup T = \underbrace{(X \cap (S \cup T))}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap (S \cup T))}_{\neq 0} \tag{*}$$

Also ist $S = (X \cap S) \uplus (Y \cap S)$ und $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$. Da S und T zusammenhängend, ist

$$((X \cap S) = \emptyset \vee (Y \cap S) = \emptyset) \ \wedge \ ((X \cap T) = \emptyset \vee (Y \cap T) = \emptyset)$$

Da die Vereinigung von S und T nicht leer ist, folgt

$$((X \cap S) = \emptyset \wedge (X \cap T) = \emptyset) \ \vee \ ((Y \cap S) = \emptyset \wedge (Y \cap T) = \emptyset)$$

Damit folgt

$$(X \cap (S \cup T) = \emptyset) \ \vee \ (Y \cap (S \cup T) = \emptyset)$$

Widerspruch zu $(*)$.

24.5 Zusammenhang des Abschlusses

SATZ:

$$\underset{\text{zsh}}{T} \subseteq M \Rightarrow \underset{\text{zsh}}{\overline{T}}$$

BEWEIS: Annahme: $\overline{T}$ nicht zusammenhängend. Dann existieren $X, Y \subseteq M$ offen mit $\overline{T} = (X \cap \overline{T}) \uplus (Y \cap \overline{T})$. Wähle $x \in (X \cap \overline{T})$, $y \in (Y \cap \overline{T})$. Dann existieren Umgebungen U_x von x, U_y von y mit $U_x \subseteq X$, $U_y \subseteq Y$. Wegen $x, y \in \overline{T}$ ist $X \cap T \supseteq U_x \cap T \neq \emptyset$ und $Y \cap T \supseteq U_y \cap T \neq \emptyset$. Dann ist $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$, damit ist T nicht zusammenhängend, Widerspruch!

24.6 Zusammenhangskomponenten

BEHAUPTUNG:

1. Die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation:

   $$a \sim b :\Leftrightarrow \ \exists \underset{\text{zsh}}{T} \subseteq M \text{ mit } a, b \in T$$

   Die Äquivalenzklassen heißen *Zusammenhangskomponenten*.

2. Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und abgeschlossen.

3. Ist K eine Zusammenhangskomponente und $T_{\text{zsh}} \subseteq M$ mit $T \cap K \neq 0$, so ist $T \subset K$.

BEWEIS:

1. Eigenschaften der Äquivalenzrelation:

   - Reflexiv: $a \sim a$, da $\{a\}$ schon zusammenhängend ist.
   - Symmetrie: trivial
   - Transitivität: Seien $a, b \in T_{\text{zsh}}$ und $b, c \in T_{\text{zsh}}$. Dann ist nach (24.4) $S \cap T$ zusammenhängend.

2. Sei K eine Zusammenhangskomponente. Annahme, K ist nicht zusammenhängend. Dann existieren

$$\underset{\text{offen}}{X}, \underset{\text{offen}}{Y} \subseteq M \text{ mit } K = \underbrace{(X \cap K)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap K)}_{\neq 0}$$

Wähle also $x \in (X \cap K)$ und $y \in (Y \cap K)$. Dann ist $x \sim y$, daher existiert $T_{\text{zsh}} \subseteq M$ mit $x, y \in T$. Damit ist $x \sim t \; \forall \, t \in T$, also $T \subseteq K$. Also ist $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$ mit $x \in X \cap T \neq \emptyset$ und $y \in Y \cap T \neq \emptyset$, damit ist T nicht zusammenhängend.

Nach (24.5) ist $\overline{K}$ zusammenhängend, wegen (3) ist $\overline{K} \subseteq K$, also $K = \overline{K}$.

3. Siehe (2).

24.7 Wegzusammenhang

Die folgenden Eigenschaften von $u, v \in M$ sind äquivalent:

(a) Es existieren $u_0, ..., u_n \in M$ mit $u_0 = u$ und $u_n = v$ und Intervalle $D_1, ..., D_n$ von $\mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f_i : D_i \to M$ mit $u_i, u_{i-1} \in f_i(D_i)$.

(b) Es gibt reele Zahlen $a < b$ und $f : [a, b] \to M$ stetig mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$.

(c) Es gibt eine Funktion $f : [0, 1] \to M$ mit $f(0) = u$ und $f(b) = v$.

Gilt eine dieser Bedingungen für alle $u, v \in M$, so ist M *wegzusammenhängend*.

Beweis:

- Zusammenhang: Betrachte die Situation in (24.7). Nach (24.2) ist jedes D_i zusammenhängend. Nach (24.3) ist jedes $f(D_i)$ zusammenhängend. Nach (24.6)(3.) liegen u_i, u_{i-1} in derselben Zusammenhangskomponente von M.

  Also: u, v liegen in derselben Zusammenhangskomponente, damit liegen alle Elemente von M in derselben Zusammenhangskomponente, d.h. es existiert nur eine Zusammenhangskomponente und M ist zusammenhängend.

- Hilfssatz 1: Zu Intervallen $[a, b]$ und $[c, d]$ exsitieren $f, g : [a, b] \to [c, d]$ bijekktiv, stetig mit $f(a) = c$, $f(b) = d$, $g(a) = d$, $g(b) = c$. Die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} sind ebenfalls stetig.

- Hilfssatz 2: Sei $a \leq b \leq$, $f : [a,b] \to M$ stetig; $g : [b,c] \to M$ stetig; $f(b) = g(b)$. Dann ist auch die folgende Funktion stetig:

$$h : [a,c] \to M \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \leq b \\ g(x) & \text{falls} \quad x \geq b \end{cases}$$

- Die Richtung (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) folgt aus den Hilfssätzen, die Richtung (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial, da jeweils Verallgemeinerung.

24.8 Streckenzusammenhang

VORAUSSETZUNG: V normierter Raum, $M \subseteq V$ metrischer Raum

DEFINITION: Für $u, v \in V$ definiere $[u,v] := \{u + t(v-u) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ als „Verbindungsstrecke".

DEFINITION: M ist *streckenzusammenhängend* genau dann, wenn für alle $u, v \in M$ Elemente $u_0, ..., u_n \in M$ existieren und $[u_{i-1}, u_i] \subseteq M$ für $i = 1, ..., n$.

BEISPIEL: Sei $U := U_\varepsilon(u) = \{v \in V \mid |v-u| < \varepsilon\}$. Sei $v \in U$, es genügt zu zeigen: $[u-v] \subseteq U$. Es ist

$$|u + t(v-u) - u| = \underbrace{|t|}_{\leq 1} \underbrace{|v-u|}_{<\varepsilon} < \varepsilon$$

24.9 offen, zsh. $\Rightarrow$ streckenzsh.

VORAUSSETZUNG: V normierter Raum, $\Omega \subseteq V$ offen und zusammenhängend (kurz: Ω ist ein *Gebiet*).

BEHAUPTUNG: Ω ist auch streckenzusammenhängend.

BEWEIS: Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω durch: $u \sim v$ genau dann, wenn $u = u_0, u_1, ..., u_n = v$ existieren mit $[u_{i-1}, u_i] \subseteq \Omega$.

- Reflexivität: trivial
- Symmetrie: folgt aus $[u,v] = [v,u]$, da $u + t(v-u) = v + (1-t)(u-v)$.
- Transitivität: trivial, „hänge" die Folgen hintereinander

Zu zeigen: Es existiert nur eine Äquivalenzklasse. Sei A eine Äquivalenzklasse, also $A \subseteq \Omega$. Zu zeigen: A ist offen. Sei $a \in A$. Wegen $A \subseteq \Omega_{\text{offen}}$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$. Wie in (24.8) gezeigt, ist die ε-Umgebung streckenzusammenhängend. Also ist $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Zudem ist $\Omega_{\text{zsh}} = A \uplus (\Omega \setminus A)_{\text{offen}}$. Also: $\Omega \setminus A$ ist leer.

24.10 Konstante Funktion/Ableitung null

VORAUSSETZUNG: V offener Raum, Ω Gebiet in V. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $f' = 0$.

BEHAUPTUNG: f ist konstant.

BEWEIS: Ω ist streckenzusammenhängend nach (24.9). Seien $u, v \in \Omega$ mit $[u, v] \subseteq \Omega$. Es genügt zu zeigen: $f(u) = f(v)$. Seien $f_1, ..., f_m$ Koordinatenfunktionen von f. Nach (23.5) ist $f_1' = ... = f_n' = 0$. Darf also $m = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}$ annehmen.

Die Funktion $[0, 1] \to \Omega$ mit $t \mapsto u+t(v-u)$ ist differenzierbar. Nach Kettenregel (23.4.2): Die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $F : t \mapsto f(u+t(v-u))$ ist differenzierbar mit Ableitung 0. F ist konstant, erhalte $f(u) = F(0) = F(1) = f(v)$.

25 Kompaktheit

25.1 Definition

VORAUSSETZUNG: Sei M ein metrischer Raum.

DEFINITION: M heißt *kompakt* genau dann, wenn

- Jede Menge $\mathcal{O}$ offener Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{X \in \mathcal{O}} X$ hat eine endliche Teilmenge $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $M = X_1 \cup ... \cup X_n$.
- Jede Menge $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ hat eine endliche Teilmenge $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $Y_1 \cap ... \cap Y_n = \emptyset$.

Also: Eine Teilmenge $K \subseteq M$ ist kompakt genau dann, wenn jede Menge $\mathcal{O}$ offener Teilmenge von M mit $K \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{O}} X$ hat eine endliche Teilmente $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $K \subseteq X_1 \cup ... \cup X_n$.

Triviale Anwendung: Sei M kompakt Für jede $\varepsilon > 0$ ist dann die Vereinigung von endlich vielen ε-Umgebungen. Insbesondere ist M beschränkt.

25.2 kompakt und vollständig

Folgendes ist äquivalent:

1. M ist kompakt
2. M ist folgenkompakt
3. M ist vollständig, und für jedes $\varepsilon > 0$ ist M die Vereinigung von endlich vielen ε-Umgebungen

BEWEIS: Siehe ausliegendes Script, schwer ist nur 3. $\Rightarrow$ 1.

25.3 weitere Sätze über stetige Funktionen

VORAUSSETZUNG: M kompakt, $f : M \to N$ stetig.

BEHAUPTUNG:

1. f ist sogar gleichmäßig stetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq M$ ist auch $f(X)$ abgeschlossen.
3. Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : f(M) \to M$ stetig.
4. Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge abgeschlossen ist.

26 Mittelwertsatz, Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen

26.1 Mittelwertsatz

VORAUSSETZUNG: V, W Banachräume, $\Omega \subseteq V$ offen. $f : \Omega \to W$ differenzierbar, $u, v \in \Omega$ mit $[u, v] \subseteq \Omega$.

BEHAUPTUNG: (mit Operatornorm)

$$\exists\, x \in [u, v] \text{ mit } \|f(v) - f(u)\| \leq \|f'(x)\| \cdot |v - u|$$

BEWEIS: Nur für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ jeweils mit 2-Norm.

1. Der Fall $n = 1$, d.h. $V = \mathbb{R}$ mit $u = 0$ und $v = 1$. Sei „$\cdot$" das Standardskalarprodukt auf $W = \mathbb{R}^m$. Also: $|w| = \sqrt{w \cdot w}$ (2-Norm). Setze

   $$w = f(1) - f(0) \text{ und } \varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi : t \mapsto w \cdot f(t)$$

   Nach Produktregel (23) ist $\varphi'(t) = wf'(t)$. Der gewöhnliche Mittelwersatz aus Analysis 1 zeigt: Es existiert $t \in [0, 1]$ mit

   $$wf'(t) = \varphi'(t) = \varphi' t(t) \cdot (1 - 0) = \varphi(1) - \varphi(0) = w(f(1) - f(0)) = w \cdot w$$

   Dann folgt

   $$|w|^2 = |f'(t)w| \leq |f'(t)| \cdot |w|$$

   Darf $w \neq 0$ annehmen, d.h. $\|w\| \neq 0$, erhalte

   $$|f(v) - f(u)| = |w| \leq |f'(t)| = |f'(t)| \cdot |1 - 0|$$

2. Der allgemeine Fall $V = \mathbb{R}^n$. Wende Fall 1 an auf

   $$g : [0, 1] \to W = \mathbb{R}^m \text{ mit } g : t \mapsto f(u + t(v - u))$$

   Erhalte $t \in [0, 1]$ mit

   $$|g(1) - g(0)| \leq |g'(t)| \cdot (1 - 0) = \underbrace{f(u + t(v - u)) \cdot (v - u)}_{\text{Matrixmultiplikation}}$$

   Weiter: $g(1) - g(0) = f(v) - f(u)$ Also:

   $$|f(v) - f(u)| \leq |f'(x) \cdot (v - u)| \leq |f'(x)| \cdot |v - u|$$

26.2 Konstante Funktion/Ableitung null

Die allgemeine Version des Mittelwertsatzes erlaubt eine entsprechende Verallgemeinerung von Satz (24.10) ($f' = 0 \Rightarrow f$ konstant, Beweis: $|f(v) - f(u)| \leq 0 \cdot ... = 0$, also $f(u) = f(v)$).

26.3 Der Schrankensatz

Definition: Eine Teilmenge M eines normierten Raumes V heißt *konvex*[62] genau dann, wenn für alle $u, v \in M$ auch $[u, v] \subseteq M$ gilt.

Voraussetzung: Sei $X_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar (kurz: $\mathcal{C}^1$-Funktion), sei $K \subseteq \Omega$ beschränkt, abgeschlossen, konvex.

Behauptung:

$$\|f(v) - f(u)\|_2 \leq \|v - u\|_2 \cdot \sup\{\, \|f'(x)\|_2 \mid x \in K\} \ \forall\, u, v \in K$$

Bemerkung: Das Supremum existiert wegen (20.3.4), $x \mapsto |f'(x)|$ ist stetig!

Beweis: Zu $u, v \in \mathbb{R}^n$ existieren $u_0, u_1, ..., u_p \in \mathbb{R}^n$ mit $u_0 = u$ und $u_p = v$ sowie $[u_{i-1}, u_i] \subseteq K$. Mit Mittelwertsatz ist für ein $x \in [u_{i-1}, u_i] \subseteq K$:

$$|f(u_i) - f(u_{i-1})| \leq |u_i - u_{i-1}| \cdot |f'(x)|$$

Es ist $f(v) - f(u) = \sum_{i=1}^{n}(f(u_i) - f(u_{i-1}))$. □

26.4 Ableitung der Umkehrfunktion

26.4.1 Hilfssatz

Voraussetzung: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in \Omega$.

Behauptung: Es existieren $r, s, \delta > 0$ mit

$$r \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq s \ \forall\, x \in \Omega \text{ mit } |x - a| \leq \delta$$

Beweis: Wir haben $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x-a)}{|x-a|} = 0$. Also: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{|x - a|}\right| \leq \varepsilon \ \forall\, x \in \Omega \setminus \{a\} \text{ mit } |x - a| \leq \delta$$

[62] „...in meinem jugendlichen Eifer...“

Erhalte für alle $x \in \Omega \setminus \{a\}$ mit $|x-a| \le \delta$:

$$\left| \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| - \left| \frac{\alpha(x-a)}{|x-a|} \right| \right| \le \left| \frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{|x-a|} \right| \le \varepsilon$$

Also ist für alle entsprechenden x:

$$\underbrace{\left| \frac{\alpha(x-a)}{|x-a|} \right| - \varepsilon}_{:=r} \le \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| \le \underbrace{\left| \frac{\alpha(x-a)}{|x-a|} \right| + \varepsilon}_{:=s}$$

Zudem ist $\frac{\alpha(x-a)}{|x-a|} = \alpha(w)$ mit $|w| = 1$. Setze $S := \{\, w \in \mathbb{R}^n \mid |w| = 1\}$, S ist beschränkt und abgeschlossen, die Abbildung $S \to \mathbb{R}$ mit $w \mapsto |\alpha(w)|$ ist stetig. Mit (20.3.4):

$$M := \{\, |\alpha(w)| \mid w \in S\} \text{ mit } M_0 := \min M \text{ und } M_1 := \max M$$

Also ist $M_0 \neq 0$, da α bijektiv, also $M_0 > 0$. Wähle ε so, daß $M_0 - \varepsilon > 0$, dann folgt die Behauptung.

26.4.2 Ableitung der Umkehrfunktion

Voraussetzung: Sei f injektiv, $f(\Omega)$ offen, $f'(a) =: \alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar und $f_1 := f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ stetig in $a_1 = f(a)$.

Behauptung: Dann ist f^{-1} differenzierbar in a_1 mit $f_1'(a_1) = f'(a)^{-1}$.

Bemerkung: α invertierbar bedeutet, daß α bijektiv ist, damit ist die Determinante der Jacobi-Matrix (die sog. *Funktionaldeterminante*) von f ungleich 0.

Beweis: Es ist $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{|x-a|} = 0$. Da f_1 stetig in $a_1 = f(a)$, folgt:

$$\lim_{y\to a_1} \frac{y - a_1 - \alpha(f_1(y) - f_1(a_1))}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} = \lim_{y\to a_1} \frac{f(f_1(y)) - f(a) - \alpha(f_1(y) - a)}{|f_1(y) - a|} = 0$$

Die Umkehrfunktion α^{-1} ist stetig, also ist

$$\lim_{y\to a_1} \left((\pm 1) \cdot \beta \left(\frac{y - a_1 - \alpha(f_1(y) - f_1(a_1))}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} \right) \right) = \beta(0) = 0$$

Dann ist

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} = 0$$

Definiere

$$A := \frac{|f_1(y) - f_1(a_1)|}{|y - a_1|}$$

Dann ist auch

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} \cdot A = 0$$

Denn: Mit $x = f_1(y)$ gilt $A = \frac{|x-a|}{f(x)-f(a)}$, und A ist nach Hilfssatz $s^{-1} \leq A \leq r^{-1}$ auf einer geeigneten Umgebung von a_1 beschränkt. Es folgt: Dann ist auch

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|y - a_1|} = 0$$

Damit ist

$$f_1'(a_1) = \beta = \alpha^{-1} = f'(a)^{-1}$$

26.5 Der Banachsche Fixpunktsatz

Voraussetzung: Sei M ein vollständiger metrischer Raum, sei $0 < \lambda < 1$, $f : M \to M$ und gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)\ \forall\, x, y \in M$$

Behauptung:

1. Es existiert genau ein $a \in M$ mit $f(a) = a$.
2. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen a.

Beweis: siehe Übungsaufgaben

26.6 Stetigkeit der inversen Abbildung

Voraussetzung: A Banachalgebra, A^* Einheitengruppe.

Behauptung: A^* ist offen in A und folgende Abbildung ist stetig:

$$f : A^* \to A^* \text{ mit } f : u \mapsto u^{-1}$$

Beweis: siehe Übungsaufgaben

26.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Voraussetzung: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ injektive $\mathcal{C}^1$-Funktion $f(U)$ offen, $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig, $f'(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar (d.h. die Determinante ist ungleich 0) für alle $u \in U$.

Behauptung: f^{-1} ist ebenfalls $\mathcal{C}^1$-Funktion mit

$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}\ \forall\, a \in U$$

26.8 Hauptsatz: Der Umkehrsatz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $a \in \Omega$ und $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar.

BEHAUPTUNG: Es existiert eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von a mit den in (26.7) aufgeführten Eigenschaften (Bezeichnung $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$) BEWEIS: Arbeite mit der 2-Norm auf $\mathbb{R}^n$ (wegen Schrankensatz (26.3))

1. O.B.d.A ist $a = 0$ und $f(0) = 0$
2. O.B.d.A ist $f'(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} =: I$
3. Für $y \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_y : x \mapsto y + x - f(x)$$

   Es gilt:

   (a) $\varphi_y(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$
   (b) $\varphi_y'(x) = I - f'(x)$

4. Es existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$K := \overline{U_\varepsilon(0)} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq \varepsilon\} \subseteq \Omega$$

   und

$$|f'(0) - f'(x)| \leq \frac{1}{2} \; \forall \, x \in K$$

5. Es gilt für alle[63] $u, v \in K$:

$$|\varphi_y(v) - \varphi_y(u)| \leq |v - u| \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} \left|\varphi_y'(x)\right|}_{\leq \frac{1}{2}}$$

6. Es ist für alle $x \in K$:

$$|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)| \leq \frac{1}{2} |x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

7. Für alle $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist

$$|\varphi_y(x)| \leq |\varphi_y(0)| + \frac{\varepsilon}{2} = |y| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

   Betrachte nun nur noch $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sezte $V = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$.

[63] „... das hatte ich Ihnen nicht vorgerechnet, um Ihnen nicht den Spaß daran zu nehmen!“

8. Erhalte mit dem Banachschen Fixpunktsatz (26.5) angewandt auf $\varphi_y : K \to K$ für jedes $y \in V$ genau einen Fixpunkt $x \in K$ und definiere $f_1 : y \mapsto x$.

9. Zu jedem $y \in V$ existiert genau ein $x \in U_\varepsilon(0)$ mit $y = f(x)$ (d.h. $\varphi_y(x) = x$ nach (3a).

10. Setze $U = f^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(0)$. Dann ist U offen in Ω, also in $\mathbb{R}^n$. $U = f_1(V)$, $f : U \to V$ ist injektiv, $f_1 : V \to U$ ist die inverse Funktion $f|_U^{-1}$.

11. $f_1 : V \to U$ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig mit $L = 2$).

12. $f'(u)$ ist invertierbar (d.h. bijektiv, d.h. im Endlichdimensionalen injektiv, d.h. Kern $f'(u) = \{0\}$)

Bemerkungen:

- Zu (1): Es existiert eine offene Umgebung Ω_0 von 0 mit $x + a \in \Omega$ für alle $x \in \Omega_0$. Ersetze f durch die Funktion
$$f_0 : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n \text{ mit } f_0 : x \mapsto f(x+a) - f(a)$$
- Zu (2): Ersetze f durch
$$\alpha^{-1} \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \alpha := f'(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$
- Zu (4): Da Ω offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq \Omega$. Wähle $\varepsilon < \delta$, dann ist $K \subseteq U_\delta(0)$. Zudem ist f' stetig nach Voraussetzung.
- Zu (5): K ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Wende Schrankensatz (26.3) an, $\varphi_y : K \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion. Nach (3b) ist $\varphi_y(x) = I - f'(x) = f'(0) - f'(x)$, wende (4) an.
- Zu (8): $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist vollständig, denn $\mathbb{R}^n$ ist vollständig und K ist abgeschlossen. Nach (5) und (7) ist alles klar (sic!)
- Zu (10): U ist offen in Ω, da f stetig ist, und offen in $\mathbb{R}^n$, da Ω offen in $\mathbb{R}^n$ ist.
- Zu (11): Seien $y_1, y_2 \in V$. $x_1 = f_1(y_1)$, $x_2 = f_1(y_2)$. Dann ist
$$x_2 - x_1 = \varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1) + f(x_2) - f(x_1)$$
Aus (5) folgt:
$$|x_2 - x_1| \leq |\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)| + |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
Dann gilt: $|f_1(y_2) - f_1(y_1)| \leq 2|y_2 - y_1|$, also ist die Funktion Lipschitz-stetig mit $L = 2$.

- Zu (12): Sei $u \in U$. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt mit $\alpha = f'(u)$:
$$|(I - f'(u))v| \le |I - \alpha|\,|v| \le \frac{1}{2}\,|v|$$
Annahme: $\alpha v = 0$. Dann ist
$$|v| = |Iv| = |IV - \alpha v| = |(I-\alpha)v| \le \frac{1}{2}\,|v|$$
Gilt nur für $v = 0$.

26.8.1 Korollar zum Umkehrsatz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv, $f'(a)$ invertierbar in allen $a \in \Omega$.

BEHAUPTUNG: $\Omega_1 := f(\Omega)$ und offen (in $\mathbb{R}^n$) und $f^{-1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion mit
$$f'(f(a)) = f'(a)$$

BEWEIS: Für alle $a \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U(a) \subseteq \Omega$ mit $f(U(a))$ offen und $f^{-1}|_{U(a)}$ $\mathcal{C}^1$-Funktion. Also:
$$\underset{\text{offen}}{f(\Omega)} = \bigcup_{a\in\Omega} f(U(a))$$
Der Rest ist klar, siehe auch (26.7).

26.9 Umkehrsatz auf $\mathbb{C}$

Der Umkehrsatz (mit Korollar) gilt genauso für $\mathbb{C}^n$. Bei normierten Räumen über $\mathbb{C}$ ist die Ableitung einer Funktion an einer Stelle per definitionem eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.

SPEZIALFALL: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ injektiv, $f'(a) \neq 0 \;\forall\, a \in \Omega$.

BEHAUPTUNG: $f^{-1} : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

ANWENDUNG: $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto e^z$, Ω ein offener Streifen (in $\mathbb{C}$) der Höhe 2π, d.h. $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit
$$\Omega = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, a < y < a + 2\pi\}$$
Setze $A = \{x + ia \mid x \in \mathbb{R}\}$. Wir wissen: Die e-Funktion ist injektiv auf $\Omega \cup A$, mit Bild $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also: $f(\Omega) = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus f(A)$. Was ist $f(A)$?
$$\begin{aligned}\left\{e^{x+ia} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{e^x \cdot e^{ia} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}\, e^{ia}\\ &= \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{ia}\end{aligned}$$

Erhalte die Umkehrfunktion $L : \mathbb{C}_a \to \Omega$ mit $e^z \mapsto z \in \Omega$ ist differenzierbar mit
$$L'(e^z) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{e^z}$$
HAUPTFALL: $e^{ia} = -1$, d.h. $a = -\pi$. Dann $\mathbb{C}_a = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (Hauptzweig der Logarithmusfunktion)

26.10 Satz über implizite Funktionen

VORAUSSETZUNG: $\Omega_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ „=“ $\mathbb{R}^{p+q}$; $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$; $(a,b) \in \Omega$ Nullstelle von F Die folgende lineare Abbildung ist invertierbar (insbesondere ist $m = q$):
$$\mathbb{R}^q \to W \text{ mit } y \mapsto (F'(a,b))(0,y) \qquad (*)$$
BEHAUPTUNG: Es existieren Umgebungen $U(a) \subseteq \mathbb{R}^p$ und $U(b) \subseteq \mathbb{R}^q$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion

$g : U(a) \to U(b)$ mit $g : \{(x,y) \in U(a) \times U(b) \mid F(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U(a)\}$

SPEZIALFALL: $p = q = m = 1$. Wir haben $F'(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} D_1F(a,b) & D_2F(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1F(a,b)x + D_2F(a,b)y$$
Die Abbildung in $(*)$ ist also
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } y \mapsto D_2F(a,b)y$$
D.h., daß $D_2F(a,b) \neq 0$.

BEISPIEL: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto x^2(1-x^2) - y^2$. Bestimmung von $g(x)$:
$$F(x, g(x)) = 0 \; \forall \, x \in A \qquad x^2(1-x^2) - g(x)^2 = 0$$
$$2x(1-x^2) + x^2(-2x) - 2g(x) \cdot g'(x) \qquad g'(x) = \frac{2x(1-x^2) - 2x^3}{2g(x)}$$
Bestimmung von $g'(x)$ im Spezialfall ($p = q = m = 1$): $S(x) := F(x, g(x)) = 0 \; \forall \, x \in A$,
$$\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$
$$x \overset{G}{\mapsto} (x, g(x)) \mapsto$$

$$
\begin{aligned}
0 &= S'(x) = F'(x, g(x)) \circ G'(x) \\
&= \begin{pmatrix} D_1F(x, g(x)) & D_2F(x, g(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} \\
&= D_1F(x, g(x)) + g'(x) D_2F(x, g(x)) \\
g'(x) &= \frac{-D_1F(x, g(x))}{D_2F(x, g(x))}
\end{aligned}
$$

„Wenn Sie das alles gut beherrschen,
was wir hier gemacht haben,
wissen Sie fast mehr als ich vor ein paar Monaten!“

Index