Analysis Ergänzung

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

1 Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ 1

1.1 Vorbetrachtung 1
1.2 Gibt es einen vollständig geordneten Körper? 2
1.3 Sind je zwei solche geordnete Körper isomorph? 2
1.4 Gibt es je nur einen Isomorphismus? 2
1.5 Konstruktion von $\mathbb{R}$ 2
1.5.1 Ring- und Idealeigenschaften der Mengen der Folgen . 3
1.5.2 Definition von $\mathbb{R}$ etc. 3
1.5.3 $\mathbb{R}$ ist ein Körper 3
1.5.4 $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet 4
1.5.5 Hilfssatz 4
1.5.6 Satz 5
1.6 Anhang 5
1.6.1 Dedekinds Konstruktion von $\mathbb{R}$ 5
1.6.2 Bewertete Körper 5
1.6.3 Bücher 7

2 Topologische Räume 8

2.1 Definitionen 8
2.2 Vorbemerkungen 9
2.3 Satz von Heine-Borel 9
2.4 Anhang 10
2.4.1 Bücher 10

3 Fundamentalsatz der Algebra 11

3.1 Vorbemerkung 11
3.2 Fundamentalsatz der Algebra - *Ziel* 11
3.3 Lemma 11
3.4 Fundamentalsatz der Algebra - *Beweis* 12

4 Allgemeine Summierbarkeit 14

4.1 Vorbetrachtungen, Definitionen, Lemmata 14
4.2 Der Hauptsatz, Teil 1 18
4.3 Der Hauptsatz, Teil 2 18
4.4 Doppelreihensatz 19

1 Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

Ausgehend von dem geordneten Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen[1] fragen wir:

1. Existenz: Gibt es einen vollständig geordneten Körper? *ja!*
2. Eindeutigkeit: Sind je zwei solche geordnete Körper isomorph? *ja!*
3. Kanonischer Isomorphismus: Gibt es je nur einen Isomorphismus? *ja!*

1.1 Vorbetrachtung

- Sei $\mathbb{R}$ schon gegeben.
- Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ (weil es zu reellen Zahlen $u < v$ immer eine rationale Zahl q gibt mit $u < q < v$). Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge, und in der Definition des Begriffes *Cauchyfolge* genügt es, nur $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ zu betrachten.
- Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ ist eine **Cauchyfolge** bezüglich $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn

$$\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q} \;:\; \underbrace{\forall\, p, q \in \mathbb{N} \;:\; |a_p - a_q| < \varepsilon}_{\text{fast alle } p,q}$$

- Sei A die **Menge aller Cauchyfolgen** in $\mathbb{Q}$. Da dies genau die in $\mathbb{R}$ konvergenten $\mathbb{Q}$-Folgen sind, ist A bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen. A ist ein *kommutativer Ring*, genauer ein Teilring des Ringes aller Folgen in $\mathbb{Q}$.
- Betrachte die surjektive Abbildung

$$\alpha : A \to \mathbb{R} \text{ mit } f \mapsto \lim f$$

  Damit ist α ein **Ringhomomorphismus** von A auf $\mathbb{R}$. Der Homomorphiesatz besagt: $\mathbb{R} \simeq A/I$, wobei $I := \operatorname{Kern}(\alpha)$ (gleich Menge aller Nullfolgen in $\mathbb{Q}$).
- **Betrachtung der Ordnung:** Ich (Bender) kann die positiven Zahlen in $\mathbb{R}$ an den Gliedern der Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erkennen: Wenn fast alle Folgeglieder größergleich einer positiven rationalen Zahl sind, ist auch der Limes der Folge positiv (analog negativ).

[1] „Zahlen sind Dinge, die nicht nur Mathematikern gehören, sodern der ganzen Menschheit!“

- Zum Teil wird eine Ordnung auf einer Menge folgendermaßen definiert: Gegeben sei eine Partition des Körpers K durch: $K = P \uplus \{0\} \uplus -P$, wobei P der sog. *Positivitätsbereich* ist und bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. Dann kann man die Ordnungsrelation definieren als: $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$.

1.2 Gibt es einen vollständig geordneten Körper?

ja!

1.3 Sind je zwei solche geordnete Körper isomorph?

<u>Vor.</u> Sei K ein vollständig geordneter Körper. Dann ist K als Ring isomorph zu A/I. Erhalte $K \simeq A/I \simeq \mathbb{R}$, also $K \simeq \mathbb{R}$.

<u>Beh.</u> Für alle $x, y \in K$ gilt: $x < y \Leftrightarrow \sigma(x) < \sigma(y)$.

<u>Bew.</u> Sei $P_K := \{k \in K \mid k > 0\}$ und $P_\mathbb{R} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ Dann: $P_K = \{x^2 \mid 0 \neq x \in K\}$ und $P_\mathbb{R} = \{x^2 \mid 0 \neq x \in \mathbb{R}\}$. Also: $\sigma P_K = P_\mathbb{R}$. Für alle $x, y \in K$ gilt

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x \in P_K \\ &\Leftrightarrow \sigma(y - x) \in P_\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \sigma(y) - \sigma(x) \in P_\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \sigma(x) < \sigma(y) \end{aligned}$$

1.4 Gibt es je nur einen Isomorphismus?

<u>Vor.</u> K wie oben. Seien für $i \in \{1, 2\}$ Isomorphismen definiert: $\sigma_i : K \to \mathbb{R}$.

<u>Beh.</u> $\mathbb{R}$ hat nur einen Automorphismus, nämlich $\mathrm{id}_\mathbb{R}$. Automorphismus von K ist $\sigma_2^{-1}\sigma_1$, also: $\sigma_1 = \sigma_2$.

<u>Bew.</u> Setze $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma x = x\}$ (Teilkörper von $\mathbb{R}$). Dann ist $0 \in F$, $1 \in F$, $\mathbb{Z} \subseteq F$, $\mathbb{Q} \subseteq F$.

Angenommen, $u \in \mathbb{R}$ mit $\sigma u \neq u$. Sei $u < \sigma u$, dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $u < q < \sigma u$. Erhalte $\sigma u < \sigma q = q < \sigma u$, Widerspruch

1.5 Konstruktion von $\mathbb{R}$

Grundlage ist die Analyse in (1.1).

1.5.1 Ring- und Idealeigenschaften der Mengen der Folgen

Klar: Die Menge Folgen in $\mathbb{Q}$ ist ein Ring. Daß die Menge A der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ ein Teilring und die Menge J der Nullfolgen ein Ideal von A ist, folgt so:

1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$.

$$\begin{aligned} |(a_p + b_p) - (a_q + b_q)| &= |(a_p - a_q) + (b_p - b_q)| \\ &= |(a_p - a_q)| + |(b_p - b_q)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \text{ für fast alle } p, q \end{aligned}$$

2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Beide Folgen sind als Cauchyfolgen beschränkt, d.h. es existiert $c > 0$ mit $|a_n|, |b_n| < c$ für alle n.

$$\begin{aligned} |a_p b_p - a_q b_q| &= |a_p(b_p - b_q) + b_q(a_p - a_q)| \\ &= |a_p|\,|b_p - b_q| + |b_q|\,|a_p - a_q| \\ &< c \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon \text{ für fast alle } p, q \end{aligned}$$

3. Idealeigenschaften: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ (also beschränkt), $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J$, damit ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Nullfolge, damit ist J ein Ideal.[2]

1.5.2 Definition von $\mathbb{R}$ etc.

- Definiere den Ring $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R} := A/J$. Also existiert ein Ring-Epimorphismus $A \to \mathbb{R}$ mit $f \to \overline{f}$ mit Kern J.
- Definiere $f \sim g :\Leftrightarrow f - g \in J \Leftrightarrow \overline{f} = \overline{g}$ für $f, g \in A$.
- Definiere $\overline{q} := \overline{(q, q, q, ...)}$ fÜr $q \in \mathbb{Q}$.

1.5.3 $\mathbb{R}$ ist ein Körper

<u>Vor.</u> Definitionen wie in (1.5.2). Sei $0 \neq \overline{f} \in \mathbb{R}$, d.h. $f \notin J$.

<u>Beh.</u> $\mathbb{R}$ ist ein Körper. Zu zeigen: $\exists\, g \in A$ mit $fg \sim \overline{1}$.

<u>Bew.</u> Es gilt: $f_n \neq 0$ für fast alle n (andernfalls ist 0 Häufungspunkt von f und damit f Nullfolge). Definiere nun:

$$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } g_n := \begin{cases} f_n^{-1} & \text{falls} \quad f_n \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad f_n = 0 \end{cases}$$

[2] zu seiner LineareAlgebra-Lernzeit: „Wenn ich das ernstgenommen hätte, so hätte ich wahrscheinlich ziemlich schnell die Lust an Mathe verloren!“

Damit ist $f_n g_n = 1$ für fast alle n und damit $(fg)_{n\in\mathbb{N}} - \overline{1} = 0$ eine Nullfolge, damit $fg \sim \overline{1}$.

1.5.4 $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet

Definiere die Menge der positiven Folgen und analog die Menge der negativen Folgen:

$$P := \{f \in A \mid \ \exists\, 0 < q \in Q \text{ mit } f_n \geq q \text{ für fast alle } n\}$$

Dann ist klar: $g \sim f \in P \Rightarrow g \in P$. Zudem $f, g \in P \Rightarrow f + g \in P$ und $fg \in P$. Zudem ist $\overline{P} \uplus \{0\} \uplus -\overline{P}$.[3] Dann ist $\overline{P}$ ein Positivitätsbereich von $\mathbb{R}$, damit wird $\mathbb{R}$ nach einem allgemeinen Hilfssatz[4] zu einem geordneten Körper. Schreibe $f < g :\Leftrightarrow g - f \in P \ \forall\, f, g \in A$.

Archimedische Ordnung: Sei $f \in A$. Damit ist f beschränkt. Es existiert $q \in Q$ mit $f_n \leq q \ \forall\, n$. Nun kann man $q \in \mathbb{N}$ wählen, dann ist $\overline{f} \leq \overline{q}$.

1.5.5 Hilfssatz

Vor. K ist ein archimedisch geordneter Körper und jede Cauchyfolge konvergiert.

Beh. K ist vollständig.

Bew. Sei $\emptyset \neq X \subseteq K$, $b \in K$, $x \leq b \ \forall\, x \in X$. Zu zeigen: X hat Supremum in K. Es existieren $a, b \in K$ mit $a < b$, dann $X \cap [a, b] \neq \emptyset$. Es können a und b in $\mathbb{Q}$ gewählt werden. Setze $m_i := \frac{a_i + b_i}{2}$. Fallunterschiedung:

- m_1 ist obere Schranke von X. Setze $[a_2, b_2] := [a_1, m_1]$
- m_1 ist nicht obere Schranke von X. Setze $[a_2, b_2] := [m_1, b_1]$

Die Intervalle nehmen ab: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 ... \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Damit ist $(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$ eine Nullfolge wegen der archimedischen Ordnung.

Zusatz: Sei $\mathbb{Q}_1 \backsimeq \mathbb{Q}$ der Primkörper von K. Es genügt anzunehmen, daß jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}_1 \ \forall\, n$ in K konvergiert. Grund:

$$\forall\, u, v \in K \text{ mit } u < v\ \exists\, q \in Q_1 \text{ mit } u < q < v$$

[3] Klar: $\overline{P} \cap -\overline{P} = \emptyset$. Sei $f \in A\ J$. Da 0 kein Häufungspunkt von f ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $|f_n| > \varepsilon$ für fast alle n.

[4] Allgemeiner Hilfssatz: K Körper, $P \subseteq K$ mit $f + g \in P$ und $fg \in P$ für alle $f, g \in P$ und $K = P \uplus \{0\} \uplus -P$, dann wird K durch $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$ zu einem geordneten Körper.

(dies gilt allgemein in archimedisch geordneten Körpern). Damit ist die Frage, ob ein Körper vollständig ist, auf die Frage zurückgeführt werden, ob jede Cauchyfolge in $\overline{\mathbb{Q}}$ konvergiert.

1.5.6 Satz

Satz: $\mathbb{R} = A/J =: A$ ist vollständig, wobei A der Ring der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ ist und I Ideal der Nullfolgen in $\mathbb{Q}$. $f \to \overline{f}$ ist Ringhomomorphismus von A auf $\mathbb{R}$ mit Kern J.

$\mathbb{R}$ ist geordnetet Körper, archimedisch, bleibt zu zeigen: Für $q \in \mathbb{Q}$ setze $\overline{q} = (q, q, ...) \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{Q}(\mathbb{R}) = \{\overline{q} \mid q \in \mathbb{Q}\}$ (siehe Hilfessatz).

Vor. Sei $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ...$ eine Cauchyfolge in $\overline{\mathbb{Q}}$, d.h. $a_n \in \mathbb{Q}$.

Beh.
1. Die Folge $f := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge
2. $\overline{f} = \lim_{n\to\infty}(\overline{a_n})$

1.6 Anhang

1.6.1 Dedekinds Konstruktion von $\mathbb{R}$

- Setze $\mathbb{R}$:= Menge der von unten beschränkten nichtleeren oberen Abschnitte ohne Minimum von $\mathbb{Q}$. Dann ist $\mathbb{R}$ bezüglich $\leq$ (bzw. $\subseteq$) geordnet, sogar linear und vollständig.
- Addition: $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
- Multiplikation: Für beliebige B und $A \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ setze $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$
- ...

1.6.2 Bewertete Körper

1. Definition: Sei K ein Körper, die Abbildung $\varphi : K \to \mathbb{R}$ (oder beliebiger geordneter Körper) ist eine Bewertung von K genau dann, wenn
   - $\varphi(0) = 0$
   - $\varphi(a) > 0$ für alle $a \neq 0$
   - $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
   - $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$
   - $\varphi(a - b) \geq |\varphi(a) - \varphi(b)|$

BEMERKUNG: $d(a,b) = \varphi(a-b)$ ist eine Metrik auf K.

HAUPTBEISPIEL:

- $\mathbb{R}$ mit Betragsfunktion
- $\mathbb{C}$ mit Betragsfunktion
- $\mathbb{Q}$ mit φ_p, wobei p Primzahl ist

2. Das Beispiel $K = \mathbb{Q}$, $\varphi = \varphi_p$, p eine Primzahl. Schreibe für $0 \neq a \in \mathbb{Q}$:

$$a = p^j \cdot \frac{s}{t}$$

mit $j \in \mathbb{Z}$, $s, t \in \mathbb{Z}$ prim zu p, j ist durch a völlig bestimmt.

DEFINITION: $\varphi(a) = p^{-j}$, Beweis nur für die vierte Regel:

Sei $b = p^i \cdot \frac{u}{v}$ und $i \leq j$. Dann ist

$$a + b = p^i \cdot \frac{ut + p^{j-i}sv}{tv}$$

Falls $i < j$, dann ist $\varphi(a+b) = p^{-i} = \varphi(b)$. Falls $i = j$ ist $\varphi(a+b) \leq p^{-i} = \varphi(b)$. Es gilt sogar: $\varphi(a+b) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$.

Die Bewertung heißt *p-adische Bewertung* von $\mathbb{Q}$.

3. DEFINITION: Sei φ Bewertung von K. Die Bewertung ist *nicht archimedisch* genau dann, wenn $\varphi(1+1+1+1+...) \leq 1$.

LEMMA: φ nicht archimedisch genau dann, wenn $\varphi(a+b) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ \forall\, a, b \in K$

BEMERKUNG: Für $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ gilt sogar $\varphi(a+b) = \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$

4. DEFINITION (K, φ) ist vollständig genau dann, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

PROBLEM: Finde zu (K, φ) einen bewerteten Oberkörper $(\tilde{K}, \tilde{\varphi})$ mit $\tilde{\varphi} = \varphi$ auf K, jedes $u \in \tilde{K}$ ist Limes einer Cauchyfolge in K.

5. Alle diese $(\tilde{K}, \tilde{\varphi})$ sind über K isomorph. Andeutung: $\tilde{K} \simeq A/I$

HILFSSATZ: Sei $\tilde{K}$ ein bewerteter Körper, K ein Teilkörper, jedes $u \in \tilde{K}$ sei Limes einer K-Folge, und jede Cauchyfolge in K konvergiere in $\tilde{K}$. Dann ist $\tilde{K}$ vollständig.

6. Konstruktion von $(\tilde{K}, \tilde{\varphi})$ aus (K, φ): Setze $\tilde{K} = A/I$ (analog wie oben), zeige: $\tilde{K}$ ist ein Körper. Definiere $\tilde{\varphi}$ so:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{f}) := \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n)$$

Achtung: $(\varphi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$!

Annahme: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist $\varphi(f_p - f_q) < \varepsilon$ für fast alle p, q. Dann folgt:

$$|\varphi(f_p - \varphi(f_q)| \leq \varphi(f_p - f_q) < \varepsilon \;\forall\; p, q$$

7. Erhalte für jede Primzahl p „die“ Vervollständigung Ω_p von $\mathbb{Q}_p$ (mit φ_p). In Ω_p konvergiert jede Reihe

$$a_{-m}p^{-m} + a_{-m+1}p^{-m+1} + \ldots + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a_j \leq p - 1$. Jedes Element $q \in \Omega_p$ hat genau eine solche Darstellung, ist Limes genau einer solchen Reihe.

8. φ sei eine nicht-archimedische Bewertung von K. Eine Folge $\varphi(a_n)$ ist schon dann eine Cauchfolge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\varphi(a_{n+1} - a_n) < \varepsilon \;\forall\; n$$

Sei K vollständig. Dann konvergiert eine Reihe schon dann, wenn ihr eine Nullfolge zugrunde liegt.

1.6.3 Bücher

- Van der Waerden - Algebra I
- Jacobsen - Lectures in Abstract Algebra III

2 Topologische Räume

2.1 Definitionen

Sei M metrischer Raum. DEFINITIONEN:

1. Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt genau dann *offen*, wenn für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subseteq X$ (wobei die Umgebungen U_ε immer offen sind).

2. Eine *Topologie* auf M ist ein System ($\hat{=}$ Menge) O von Teilmengen, genannt *offen*, derart daß die folgenden Regeln gelten:

   (a) M ist offen und $\emptyset$ ist offen

   (b) Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen.

   (c) Der Schnitt von zwei (bzw. endlich vielen) offenen Mengen ist offen.

3. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge M zusammen mit einer Topologie auf M.

4. Sei $a \in M$. Eine *Umgebung* von a ist eine Teilmenge U, so dass eine offene Menge X existiert, so daß $a \in X \subseteq U$.

5. $X \subseteq M$ sei genau dann *abgeschlossen*, wenn $M \setminus X$ offen ist.

6. Ein topologischer Raum heißt *Hausdorffsch* genau dann, wenn

$$\forall\, a, b \in M \;:\; a \neq b\; \exists\, U(a), U(b) \subseteq M \;:\; U(a) \cap U(b) = \emptyset$$

7. Sei $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sowie $\tilde{R} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und passe die Ordnungsrelationen entsprechend an.

8. Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt *kompakt* genau dann, wenn jede Überdeckung von X durch offene Mengen von M eine endliche Teilüberdeckung enthält. D.h. wenn $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ und alle U_i offen sind, dann existieren $i_1, ..., i_n$ mit $X \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$ buh!

2.2 Vorbemerkungen

- „Herstellen“ eines topologischen Raumes aus einer linear geordneten Menge: Sei L eine linear geordnete Menge. Für $x \in L$ definiere $U(x) :=$ Menge aller intervalle I von L mit $x \in I$ und:

  - $x \neq \min I$ falls $x \neq \min L$
  - $x \neq \max I$ falls $x \neq \max L$

  Sei $X \subseteq L$ offen genau dann, wenn für alle $x \in X$ ein $I \in U(x)$ existiert mit $I \subseteq X$. Hiermit sind alle Eigenschaften einer Topologie erfüllt.

- Betrachte $\hat{\mathbb{R}}$. Eine Umgebung von ∞ ist eine Teilmenge U (mit $\infty \in U$) mit $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon\} \subseteq U$ f"ur ein geeigenetes ε.

- Projektion von $\mathbb{R}$ auf einen Kreis: Kreis ohne „Nordpol“ ($\widehat{=}\infty$):

- Vor. Sei A abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge M.

  Beh. A ist kompakt.

  Bew. Sei $A \subseteq \bigcup\limits_i U_i$. Da $M = (M \setminus A) \cup \bigcup\limits_i U_i$ existieren $U_1, U_2, ..., U_n$ mit $M \subseteq (M \setminus A) U_1 \cup ... \cup U_n$. Also $A \subseteq (M \setminus A) \cup U_1 \cup ... \cup U_n$

- Vor. Sei M ein topologischer Hausdorff-Raum, $K \subseteq M$ kompakt.

  Beh. K abgeschlossen

  Bew. Sei $a \in M \setminus K$. Zu zeigen: Es existiert eine Umgebung V von a mit $V \cap K = \emptyset$.

  Für alle $x \in K$ existieren offene Umgebungen U_x von x und V_x von x mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Da $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in K} U_x$ ist, existieren $x_1, ..., x_n \in K$ mit $K \subseteq U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$.

  $V = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$ Umgebung von a, also $V \cap K = \emptyset$

2.3 Satz von Heine-Borel

Beh. Jedes Intervall $[a, b]$ ist kompakt.

Bew. Annahme, die Behauptung sei falch. Sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$, aber $(*)[a, b] \not\subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \; \forall \, i_1, ..., i_n \in I$.

Betrachte Zerlegung mit $m \in (a, b)$. Dann ist $(*)$ auch richtig für $[a, m]$ und $[m, b]$, erhalte eine entsprechende Intervallschachtelung $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Dann existiert $r \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq r \leq b_n \; \forall \; n$. Zudem existiert i mit $r \in U_i$, es existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(r) \subseteq U_i$. Zudem existiert n mit $b_n - a_n < \varepsilon$. Damit ist das n-te Intervall überdeckt von $U_\varepsilon(r)$, Widerspruch zu $(*)$!

2.4 Anhang

2.4.1 Bücher

- Franz, Topologie I + II
- Dugundji, Topology

3 Fundamentalsatz der Algebra

3.1 Vorbemerkung

Bewiesen wird in der normalen Analysis2-Vorlesung:

- $e^{u+v} = e^u \cdot e^v \ \forall\, u, v \in \mathbb{C}$
- $e^{nu} = (e^u)^n \ \forall\, u \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
- $e^u = e^{n \cdot \frac{u}{n}} = \left(e^{\frac{u}{n}}\right)^n$
- Weiter:
$$0 \neq z \in \mathbb{C} \Rightarrow \ \exists\, u \in \mathbb{C} \text{ mit } z = e^u$$
- Damit: jede komplexe Zahl hat eine n-te Wurzel.

3.2 Fundamentalsatz der Algebra - *Ziel*

Vor. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ mit } a_j \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

Setze $A = |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|$.

Beh. Es existiert $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$.

3.3 Lemma

Beh. Die Menge $\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{C}\}$ hat ein Minimum.

Bew. Für $\varepsilon > 0$ definiere $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq \varepsilon\}$. Dann ist K_ε beschränkt und abgeschlossen. Mit dem Satz vom Maximum und Minimum für $\mathbb{R}^2$ gilt: $\{|f(x)| \mid x \in K_\varepsilon\}$ hat ein Minimum m.

Wähle $\varepsilon > 1$ und $\varepsilon > 2 \cdot A$. Wegen $m \leq |f(0)| = |a_0| \leq A$ genügt es zu zeigen:

$$|f(x)| \geq A \ \forall\, x \in \mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$$

Betrachte $x \in \mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$, also $|x| > 1$ und $|x| > 2 \cdot A$. Schreibe:

$$f(x) = x^n(1 + g(x)) \text{ mit } g(x) = \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \frac{a_0}{x^n}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{x^i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{n-i}|}{|x|^i} \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{n-i}| \right) \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot A \\
&\leq \frac{1}{2A} \cdot A = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also:

$$|1 + g(x)| \geq 1 - |g(x)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Damit kann man abschätzen:

$$|f(x)| = |x|^n \cdot |1 + g(x)| \geq \frac{1}{2} \cdot |x|^n = \frac{|x|}{2} \cdot \underbrace{|x|^{n-1}}_{\geq 1} > \frac{2 \cdot A}{A} \cdot 1 = A$$

3.4 Fundamentalsatz der Algebra - *Beweis*

Bew. Sei $|f(x_0)|$ das Minimum im Lemma. Zu zeigen: $f(x_0) = 0$. Angenommen, $f(x_0) \neq 0$. Betrachte dann neues Polynom

$$g(x) = \frac{1}{f(x_0)} f(x_0 + x)$$

Wegen $g(0) = 1$ (konstantes Glied) ist

$$g(x) = 1 + bx^k + x^{k+1} \cdot h(x) \text{ mit } h(x) \in K[x] \text{ und } k \in \mathbb{N}, 0 \neq b \in \mathbb{C}$$

Jede komplexe Zahl hat eine k-te Wurzel (siehe oben). Also existiert $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\beta^k = -b^{-1}$. Erhalte:

$$g(\beta \cdot x) = 1 + b \cdot (-b^{-1}) \cdot x^k + x^{k+1} \cdot h(x) = 1 - x^k + x^{k+1} \cdot h(x)$$

Die Funktion $|h(x)|$ ist beschränkt auf K_1 nach Satz vom Maximum und Minimum. Also existiert $r > 0$ mit $|h(x)| \leq r \; \forall \; x$ mit $|x| \leq 1$.

Für $|x| < 1$ und $|x| < r^{-1}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\left|x^{k+1}h(x)\right| &\leq |x|^k \cdot \underbrace{|x| \cdot r}_{<1} \leq |x|^k < 1 \\
|g(\beta \cdot x)| &\leq \underbrace{\left|1 - x^k\right|}_{1-|x|^k} + \underbrace{\left|x^{k+1} \cdot h(x)\right|}_{<1}
\end{aligned}$$

Also[5] ist $|g(\beta x)| < 1$. Dann folgt:

$$\frac{|f(x_0 + \beta \cdot x)|}{|f(x_0)|} < 1 \Rightarrow |f(x_0 + \beta \cdot x)| < |f(x_0)|$$

Das widerspricht der Wahl von x_0, damit ist also die Annahme falsch, also ist $f(x_0) = 0$!

[5] Irgendwas ist nicht OK, aber es geht für ein $x > 0$.

4 Allgemeine Summierbarkeit

4.1 Vorbetrachtungen, Definitionen, Lemmata

Sei V ein Banachraum und M eine Menge. Sei $f \in \mathcal{F}(M, V)$ mit $f : i \mapsto f_i$. Dann ist $(f_i)_{i \in M}$ eine Familie von Elementen in V.

1. Betrachte für $s \in V$ folgende Bedingung:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists \underset{\text{endl}}{X} \subseteq M \;\forall\, X \subseteq \underset{\text{endl}}{Y} \subseteq M \;:\; \left| s - \sum_{i \in Y} f_i \right| \leq \varepsilon \qquad (*)$$

   Bemerkung: Es gibt höchstens ein solches s, denn: Annahme: s' ist wie s. Für $\varepsilon > 0$ sei X' analog X, dann:

$$|s - s'| = \left| \left(s - \sum_{i \in Y} f_i \right) - \left(s' - \sum_{i \in Y} f_i \right) \right| \leq 2\varepsilon$$

   Schreibe

$$s = \sum_{i \in M} f_i$$

   Nenne f *summierbar* auf M, wenn so ein $s \in V$ existiert.

2. *Vergleich mit der gewöhnlichen Konvergenz* einer Reihe $\sum f_n$: Sei $M = \mathbb{N}$. Dann ist

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \, f.f.a.\, n \;:\; |s - s_n| \leq \varepsilon$$

   Gleichwertig: Es existiert eine endliche Teilmenge X von $\mathbb{N}$, so daß für jeden endlichen Abschnitt $Y = \{1, ..., n\} \supseteq X$ gilt:

$$\left| s - \sum_{i \in Y} f_i \right| \leq \varepsilon$$

   Also (für $M = \mathbb{N}$ oder $M = \mathbb{N}_0$): $s = \sum_{i \in M} f_i$ impliziert[6]: $s = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

3. *Cauchy-Kriterium:* f ist summierbar genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists \underset{\text{endl}}{X} \subseteq M \;\forall \underset{\text{endl}}{D} \subseteq M \setminus X \;:\; \left| \sum_{i \in D} f_i \right| \leq \varepsilon \qquad (**)$$

   Beweis:

[6] d.h. Summierbarkeit ist „besser“ als gewöhnliche Konvergenz

„⇒“ Sei $\varepsilon > 0$ und X wie in (*). Sei $s = \sum_{i\in M} f_i$ und $D_{\text{endl}} \subseteq M \setminus X$. Dann ist

$$\left| s - \sum_{i\in X} f_i \right| \le \varepsilon \text{ und } \left| s - \sum_{i\in X\cup D} f_i \right| \le \varepsilon$$

Damit ist

$$\left| \sum_{i\in D} f_i \right| = \left| \left(s - \sum_{i\in X} f_i \right) - \left(s - \sum_{i\in X\cup D} f_i \right) \right| \le 2\varepsilon$$

„⇐“ Wende (**) an mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Erhalte endliche Teilmengen $X_1 \subseteq X_2 \subseteq$ ... mit

$$\left| \sum_{i\in D} f_i \right| \le \frac{1}{n} \ \forall \underset{\text{endl}}{D} \subseteq M \setminus X_n$$

Setze $a_n := \sum_{i\in X_n} f_i \in V$.

<u>Beh.</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in V

<u>Bew.</u> Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert n mit $\frac{1}{n} \le \varepsilon$. Für $p > q > n$ folgt mit $D = X_p \setminus X_q$:

$$|a_p - a_q| = \left| \sum_{i\in D} f_i \right| \le \frac{1}{q} < \frac{1}{n} \le \varepsilon$$

Dann existiert $s = \lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>Beh.</u> $s = \sum_{i\in M} f_i$

<u>Bew.</u> Für $X := X_n \subseteq Y_{\text{endl}} \subseteq M$ gilt bei $n \in \mathbb{N}$ so, daß $|s - a_n| < \varepsilon$ und $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| s - \sum_{i\in Y} f_i \right| &= \left| s - \underbrace{\sum_{i\in X} f_i}_{a_n} - \sum_{i\in Y} f_i \right| \\ &= |s - a_n| + \left| \sum_{i\in Y} f_i \right| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

4. <u>Beh.</u> f ist summierbar, wenn

$$S = \sup \left\{ \sum_{i\in E} |f_i| \;\middle|\; \underset{\text{endl}}{E} \subseteq M \right\}$$

Dann heißt f *absolut summierbar*.

Bew. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $X_{\text{endl}} \subseteq M$ mit

$$\left| S - \sum_{i \in X} |f_i| \right| \leq \varepsilon$$

Für jedes $D_{\text{endl}} \subseteq M \setminus X$ folgt:

$$\left| \sum_{i \in D} f_i \right| \leq \sum_{i \in D} |f_i| \leq \varepsilon \left(\text{wegen } \sum_{i \in X} |f_i| + \sum_{i \in D} |f_i| \leq S \right)$$

5. Beh. Ist S wie oben, dann ist auch $S = \sum_{i \in M} |f_i|$.

Bew. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $X_{\text{endl}} \subseteq M$ mit $\left| S - \sum_{i \in X} |f_i| \right| \leq \varepsilon$. Für $X \subseteq Y_{\text{endl}} \subseteq M$ folgt: $\left| S - \sum_{i \in Y} |f_i| \right| \leq \varepsilon$.

Beh. Ist umgekehrt $(|f_i|)_{i \in M}$ summierbar, so ist $S = \sum_{i \in M} |f_i|$ wie oben.

6. Beh. Ist f summierbar auf M, so ist f auch summierbar auf allen Teilmengen von M.

Bew. Sei $N \subseteq M$. Sei $\varepsilon > 0$, X wie in **. Für $D \subseteq N \setminus (X \cap N)$ ist $D \subset M \setminus X$, also

$$\left| \sum_{i \in D} f_i \right| \leq \varepsilon$$

Also gilt (**) mit N und $X \cap N$ anstelle von M und X.

7. Beh. Sei $M = M_1 \uplus \ldots \uplus M_n$ und $s_j := \sum_{i \in M_j} f_i$. Dann ist f summierbar auf M mit

$$\sum_{i \in M} f_i = s_1 + \ldots + s_n$$

Bew. Sei $\varepsilon > 0$ und X_j eine ε-Teilmenge von M_j. Setze $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ sowie $s = s_1 + \ldots s_n$ Für $X \subseteq Y \subseteq M$ folgt mit $Y_j = Y \cap M_j$: $Y = Y_1 \uplus \ldots \uplus Y_n$ und damit

$$\left| s - \sum_{i \in Y} f_i \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n} \left(s_j - \sum_{i \in Y_j} f_i \right) \right| \leq n \cdot \varepsilon$$

8. Beh. Sei[7] f summierbar, $s = \sum_{i \in M} f_i$ und $(M_j)_{j \in J}$ eine beliebige Partition von M. Setze $s_j = \sum_{i \in M_j} f_i$. Dann ist $s = \sum_{j \in J} s_j$. Ist f absolut summierbar, so ist auch die Familie $(s_j)_{j \in J}$ absolut summierbar.

[7] „Jetzt müssen wir vom Endlichen ins Unendliche schreiten, und Goethe hilft uns da auch nicht weiter!“

9. <u>Beh.</u> Sei wieder $(M_j)_{j\in J}$ Partition von M. Für jedes $j \in J$ existiert $\sum_{i\in M_j} |f_i|$. Setze $s_j = \sum_{i\in M_j} |f_i|$. Auch $\sum_{j\in J} s_j$ existiere. Dann ist f absolut summierbar.

10. <u>Vor.</u> Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $f^1, ..., f^n$ die Koordinatenfunktionen.

    <u>Beh.</u> Dann ist

    (a) f summierbar genau dann, wenn alle f^j summierbar sind.

    (b) $s = \sum_{i\in M} f_i \Leftrightarrow s_j = \sum_{i\in M} f_i^j \ \forall\, j$

11. <u>Beh.</u> Im endlichdimensionalen Raum (insbesondere $V = \mathbb{R}^n$) folgt aus f summierbar: f ist absolut summierbar.

    <u>Bew.</u> Darf $V = \mathbb{R}^n$ mit ∞-Norm annehmen. Jede Koordinatienfunktion $f^j : M \to \mathbb{R}$ ist absolut summierbar. Dann existiert $c > 0$ mit

$$\left|\sum_{i\in R} \left|f_i^k\right|\right| \le c \ \forall \underset{\text{endl}}{E} \subseteq M \ \forall\, k = 1, ..., n$$

    Dann:

$$\sum_{i\in E} |f_i| \le \sum_{i\in E} \sum_{k=1}^{n} \left|f_i^k\right| = \sum_{k=1} n \sum_{i\in E} \left|f_i^k\right| \le n \cdot c$$

12. <u>Vor.</u> Sei f summierbar, $c \ge 0$ und

$$\left|\sum_{i\in D} f_i\right| \le c \ \forall \underset{\text{endl}}{D} \subseteq M$$

    <u>Beh.</u> Dann ist $\left|\sum_{i\in M} f_i\right| \le c$.

    <u>Bew.</u> Sei $\varepsilon > 0$ und $s = \sum_{i\in M} f_i$. Dann existiert $X_{\text{endl}} \subseteq M$ mit $\left|s - \sum_{i\in X} f_i\right| \le \varepsilon$. Dann ist

$$|s| \le \left|\sum_{i\in X} f_i\right| + \varepsilon \le c + \varepsilon$$

    Da $|s| \le c + \varepsilon \ \forall\, \varepsilon > 0$, ist $|s| \le c$.

13. <u>Vor.</u> Sei X wie in (*) und f summierbar.

    <u>Beh.</u> Dann ist $\left|\sum_{i\in N} f_i\right| \le 2\varepsilon$ für jede Teilmenge $N \subseteq M \setminus X$.

4.2 Der Hauptsatz, Teil 1

Vor. Sei $M = \biguplus_{j\in J} M_j$.

Beh. Existiert $s = \sum_{i\in M} f_i$ (d.h. ist f summierbar), so existiert auch

$$s_j = \sum_{j\in M_j} f_j \;\forall\, j \in J \text{ mit } s = \sum_{j\in J} s_j$$

Bew. Sei $\varepsilon > 0$. Ich zeige: Es existiert eine endliche Teilmenge $X^* \subseteq J$ mit

$$\left| s - \sum_{j\in Y^*} s_j \right| \leq 2\varepsilon \;\forall\, X^* \subseteq \underset{\text{endl}}{Y^*} \subseteq J$$

Sei $X \subseteq M$ endliche ε-Menge (siehe (*)). Dann existiert eine endliche Menge $X^* \subseteq J$ mit $X \subseteq \biguplus_{j\in X^*} M_j$. Zu $X^* \subseteq {Y^*}_{\text{endl}} \subseteq J$ setze

$$L := \biguplus_{j\in Y^*} M_j \text{ und } N := \biguplus_{j\notin Y^*} M_j$$

Dann ist $M = L \uplus N$. Damit ist

$$s = \underbrace{\sum_{i\in L} f_i}_{l} + \underbrace{\sum_{i\in N} f_i}_{n} \text{ und } l = \sum_{j\in Y^*} s_j$$

Damit ist, wie oben bewiesen, $|s - l| = |n| \leq 2\varepsilon$.

4.3 Der Hauptsatz, Teil 2

Vor. Für alle $j \in J$ existiert $A_j := \sum_{i\in M_j} |f_i|$. Alle $\sum_{j\in J} A_j$ existieren ebenfalls.

Beh. f ist absolut summierbar (mit $\sum_{i\in M} |f_i| = \sum_{j\in J} A_j$).

Bew. Setze $A := \sum_{j\in J} A_j \in \mathbb{R}$. Es genügt zu zeigen:

$$\sum_{i\in E} |f_i| \leq A \;\forall\, \underset{\text{endl}}{E} \subseteq M$$

Zu E existiert $E^* \subseteq J$ mit $E \subseteq \bigcup_{j\in E^*} M_j =: N$. Nach obigem Lemma existiert $s := \sum_{i\in N} |f_i|$ und es gilt: $s = \sum_{j\in E^*} A_j$. Nun ist

$$\sum_{i\in E} |f_i| \leq S \leq A$$

4.4 Doppelreihensatz

Vor. Sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sei $f \in \mathcal{F}(M, V)$. Sei $\sum_i f_{ij}$ absolut summierbar für jedes j.

Beh. f ist absolut summierbar,

$$s = \sum_j \sum_i f_{ij} = \sum_i \sum_j f_{ij} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \text{ mit } c_n = \sum_{i+j=n} f_{ij}$$

Sei $f(x) = \sum_n a_n x^n$ eine Potenreihe in $\mathbb{C}$. Sei $x + u \in K$, $f(x+u) = \sum_n a_n (x+u)^n$ (konvergiert absolut, da $x+u$ im Konvergenzkreis). Wir wollen diese in der Form $\sum_n b_n x^n$ schreiben, betrachte einzelne Summanden:

$$\begin{aligned}
&a_0 \\
&a_1 u + a_1 x \\
&a_2 u^2 + a_2 \binom{2}{1} ux + a_2 x^2 \\
&a_3 u^3 + a_3 \binom{3}{1} u^2 x + a_3 \binom{3}{2} ux^2 + a_3 x^3 \\
&...
\end{aligned}$$

Setze dann

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + ... \\
&b_1 = a_1 + a_2 \binom{2}{1} u + a_3 \binom{3}{1} u^2 + a_4 \binom{4}{1} u^3 + ... \\
&...
\end{aligned}$$

Dann ist $f(x + u - u) = \sum_n b_n (x-u)^n$.[8]

[8] Ob's stimmt oder nicht, ist völlig egal!