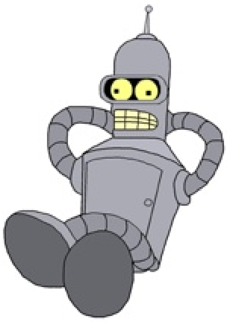
Analysis 2



Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

16.9 Hauptsatz

Sei D ein kompaktes Intervall. Konvergiert die abgeleitete Reihe

$$(P') \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{von} \qquad (P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut für jedes $x \in D$, so konvergiert auch (P) für alle $x \in D$ absolut.
Zudem ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Beweis:

1. absolute Konvergenz von (P): für alle $n \geq |x|$ gilt: $|a_n x^n| \leq |n a_n x^{n-1}|$. Wende das Majorantenkriterium (M) an.

2. Differenzierbarkeit: $f_n(x) = a_n x^n$;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| \\
= \ & |a_n| \cdot \left| \frac{x^n - y^n}{x - y} \right| \\
= \ & |a_n| \cdot \left| x^{n-1+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}} \right| \\
\leq \ & |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \text{ für } u \in D \text{ mit } |u| \geq |x| \geq x \in D \\
L_n := \ & |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \\
L_0 := \ & |a_0| \\
\sum_{n \geq 0} L_n = \ & \sum_n \underbrace{|a_n \cdot n \cdot U^n|}_{\text{konvergiert, da } (P') \text{ absolut konvergiert}}
\end{aligned}$$

17 Mehr über (unendliche) (Potenz)Reihen

17.1 Logarithmusreihe

Für $|x| < 1$ ist

1. $\log 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$
2. $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...$

Zusatz: Zu jedem $y > 0$ existiert genau ein x wie oben mit $y = \frac{1+x}{1-x}$, nämlich $x = \frac{1-y}{1+y}$.

BEWEIS:

1. Wende Hauptsatz (16.9) an mit $D = (-1, 1)$ und (P) als $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$, dann ist $(P') = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \pm ...$.

   Siehe geometrische Reihe: $1+q+q^2+q^3+...$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$. Dann ist (P') die geometrische Reihe für $q = -x$, also konvergiert (P') absolut.

   Erhalte differenzierbare Funktion auf D mit $f(x) = (P)$, dann ist $f'(x) = (P') = \frac{1}{1+x}$, die Funktion $\log 1 + x$ hat dieselbe Ableitung.

   Also existiert eine reelle Zahl k mit $\log 1 + x = f(x) + k \; \forall \; x \in D$. Suche k: Für $x = 0$ folgt: $\log 1 = 0 = f(0)$, also $k = 0$. $\square$

2. $$\begin{aligned} \log \frac{1+x}{1-x} &= \log 1 + x - \log 1 - x \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...\right) \\ &= (x + x) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\right) \pm ... \\ &= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + ... \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right) \end{aligned}$$

17.2 Arcustangensreihe

Für $|x| < 1$ ist
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm ...$$

BEWEIS: Analog zu (17.1) mit (P) als $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$ (wie oben) und $(P') : 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm ...$, wieder geometrische Reihe mit $q = x^2$.

Erhalte $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$ mit $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm ...$, welches auch die Ableitung der Arcustangens-Funktion ist. Weiter wie eben.

17.3 Endliche und unendliche Summen

FRAGE: Inwieweit kann man mit unendlichen Summen wie mit endlichen umgehen?

Illustration:

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+...=0$ konvergiert
- $1-1+1-1+1-1+...$ konvergiert nicht!

Die Reihe $(B) := \sum_{v=0}^{\infty} b_v$ gehe aus der Reihe $(A) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v$ durch sukzessive Zusammenfassung einiger Summanden hervor, Beispiel: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6, b_4 = a_7 + a_8$ usw. (beliebig).

BEHAUPTUNG:

1. Konvergiert (A) gegen $a \in \mathbb{R}$, dann auch (B)
2. Konvergiert (B) gegen $b \in \mathbb{R}$, und ist
   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
   (b) $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3 + a_4, b_3 = a_5 + a_6$, stattdessen genügt auch die Voraussetzung, daß die Anzahl der Summanden b_n beschränkt ist (folgt durch Induktion nach der maximalen Summandenzahl m),

   so konvergiert auch (A) gegen b.

BEWEIS:

1. Die Teilsummenfolge $b_1, b_1+b_2, b_1+b_2+b_3, ...$ von (B) ist eine Teilfolge der Teilsummenfolge $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, ...$. Wegen $a = \lim_{s\to\infty} a_1+...+a_s$ folgt: $a = \lim_{t\to\infty} b_1 + ... + b_t$[1]
2. Sei $s_1, s_2, s_3, ...$ die Teilsummenfolge von (A). Es gilt: $s_{2n} = b_1+b_2+...+b_n$ und $s_{2n+1} = b_1 + b_2 + ... + b_n + a_{2n+1}$

   Also: $\lim_{n\to\infty} 2_{2n} = b$ (Vor.) und $b = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = b + 0$

   Da beide Teilfolgen von $s_1, s_2, s_3, ...$ konvergieren, konvergiert auch die Folge, d.h. $b = a_1 + a_2 + a_3 + ...$

□

[1] „Gucken Sie da am besten gar nicht hin!“

17.4 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen

VORAUSSETZUNG: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge [also $a_n \geq 0$].

BEHAUPTUNG: Die Reihe

$$(A) := a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ...$$

ist konvergent. Zusatz: $0 \leq (A) \leq a_1$.

BEWEIS: Setze $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$ (z.B. $b_1 = a_1 - a_2$), dann gilt $b_n \geq 0$. Setze

$$s_n := b_1 + b_2 + ... + b_n = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - a_{2n}$$

Jede der Klammern ist ≥ 0, also ist $s_n \leq a_1$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monton wachsend und beschränkt (durch a_1), also existiert $b := \lim_{n\to\infty} s_n$, d.h. $b = \Sigma b_n$. Nach (17.3) ist auch $b = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ....$

Zusatzbemerkung: Sei b die Summe der Reihe. Schreibe $b = a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_9 - a_{10} + R$ mit $R = a_{11} - a_{12} \pm ....$ Damit ist $R \leq a_{11}$.

17.5 Logarithmus 2, Arcustangens 1

Erweiterung: Die beiden folgenden Gleichungen (aus (17.1) und (17.2)) gelten auch für $x = 1$.

1. $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$
2. $\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm ...$

BEWEIS:

0. Hilfssatz: VORAUSSETZUNG: $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig, M metrischer Raum; $X \subseteq M$; $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in X$; $a \in M$ Häufungspunkt von X

   BEHAUPTUNG: $f(a) \leq g(a)$

   BEWEIS: Annahme: $f(a) > g(a)$. Finde Umgebunden um $f(a)$ und $g(a)$, die sich nicht schneiden. Mit der Stetigkeit beider Funktionen folgt der Widerspruch.

1. Für $0 \leq x \leq 1$ ist $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, ...$ eine monoton fallende Nullfolge. Deshalb konvergiert nach (17.4) die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ....$ Definiere

$$S(x) := S_n(x) + R_n(x) := \underbrace{x - \frac{x^2}{2} \pm - \frac{x^{2n}}{2n}}_{S_n(x)} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm ...}_{R_n(x)}$$

Es gilt: $S(x) \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, zudem $0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Da $S(x) = \log 1 + x$ (17.1) gilt:

$$(*) \;\; 0 \leq \log 1 + x - S_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Nach Hilfssatz (mit $M = [0, 1]$ und $X = [0, 1)$ sowie $a = 1$) gilt $(*)$ auch für $x = 1$, d.h. $0 \leq \log 2 - S_n 1 \leq \frac{1}{2n+1}$, damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \log 2 - S_n(1) = 0 \Rightarrow \log 2 = \lim_{n\to\infty} S_n(1)$$

2. analog.

17.6 Konvergenzradius einer Potenzreihe

Sei $(P) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Dann gibt es drei Fälle:

1. Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$ (Konvergenzradius ist null).
2. Die Potenzreihe konverviert absolut für $x \in \mathbb{R}$ (Konvergenzradius ist unendlich).
3. $\exists\, r > 0$ derart, daß
   - (P) konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$
   - (P) divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > r$

   (Konvergenzradius ist r).

Zum Beweis genügt es, folgendes zu zeigen:

Voraussetzung: Sei $y \in \mathbb{R}$ derart daß $\sum_{i=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert.

Behauptung: (P) konvergiert für jedes $|x| < |y|$ absolut. Beweis: Seien x, y wie oben. Setze $q = \frac{|x|}{|y|} < 1$. Die Folge $(a_n y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, also beschränkt. D.h. es existiert $s > 0$ mit $|a_n y^n| < s \;\forall\, n$. Erhalte

$$|a_n x^n| = \left| a_n y^n \frac{x^n}{y^n} \right| = |a_n y^n| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq s q^n$$

Mit Majorantenkriterium[2] folgt: $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert absolut[3].

[2] „Ich schreib das hier noch mal hin für die jungen Leute.“
[3] „Im übrigen bin ich der Meinung, daß Computer die Leute eher verdummen.“

17.7 Wurzel- und Quotientenkriterium

17.7.1 erste Version

VORAUSSETZUNG: Sei $(R) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$.

BEHAUPTUNG:

1. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für (fast) alle n, so konvergiert (R) absolut.
2. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für (fast) alle n, so konvergiert (R).
3. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so divergiert (R).
4. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so divergiert (R).

BEWEIS:

1. Folgt wegen $|a_n| < q^n$ aus dem Majorantenkriterium (M).
2. Erledigt sich auch mit dem Majorantenkriterium:
$$|a_n| \leq \left| a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq |a_1| \cdot q^{n-1}$$
3. Aus $|a_n| > 1$ für unendlich viel n folgt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Also ist (R) divergent.
4. Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ [d.h. $|a_{n+1}| \geq |a_n|$] für fast alle n folgt ebenfalls, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

BEMERKUNG: Aus $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle n folgt nichts![4] !

17.7.2 weitere Varianten

VORAUSSETZUNG: Sei weiterhin $(R) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v$.

BEHAUPTUNG:

1. (a) Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert (R) absolut.
   (b) Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert (R) absolut.

[4] Beispiel: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

2. (a) Ist $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert (R) absolut.

   (b) Ist $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so divergiert (R) absolut.

3. Mit $\limsup$ anstelle von $\lim$ bleiben (1) und (2a) richtig.

4. Die Reihe (R) divergiert auch, wenn $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ oder $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$[5] eine unbeschränkte Folge ist.

Beweis[6]:

1. Setze $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

   (a) Wegen $L < 1$ existiert $q \in \mathbb{R}$ mit $L < q < 1$, es folgt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.

   (b) Wegen $L > 1$ ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n. Wende (17.7) an. :)

2. analog

3. setze $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, analog zu oben

4. erledigt mit (17.8)

17.8 Limes superior und inferior

- Sei $(X) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge, dann hat (X) mindestens einen Häufungspunkt. Die Menge H der Häufungspunkte ist abgeschlossen und beschränkt.

- H hat also ein Maximum h_{max}, dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := h_{max}$

- H hat zudem ein Minimum h_{min}, dann ist $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := h_{min}$

- Setze $x_{max} = \limsup x_n$.
  - Aus $x_{max} > q$ folgt: $x_n \geq q$ für unendlich viele n.
  - Aus $x_{max} < q$ folgt: $x_n \leq q$ für fast alle n.

Beweis: Wäre $x_n > q$ für unendlich viele n, so hätte die Folge (X) eine Teilfolge $(X_T) := (x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{j_n} > q \ \forall\ n$. Dann hätte (X_T) einen Häufungspunkt $h \in H$ mit $h \geq q > x_{max}$. Widerspruch zur Definition von x_{max}.

[5] „Der Punkt interessiert mich sowieso nicht.“
[6] „bla bla bla...“

- Genau dann ist $h \in H$, wenn eine Teilfolge von (X) existiert mit Limes h.
- Genau dann ist (X) konvergent, wenn $\limsup x_n = \liminf x_n$
- Falls $x_n \geq 0$ für alle n ist, gilt: Genau dann ist (X) eine Nullfolge, wenn $\limsup x_n = 0$.
- Für eine konvergente Folge $(Y) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \neq y := \lim y_n$ ist $H \cdot y$ die Menge der Häufungspunkt der Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere gilt dann (und falls $y > 0$ und $x_n \geq 0\ \forall\ n$ gilt): $\limsup x_n y_n = y \cdot \limsup x_n$.

17.9 Berechnung des Konvergenzradius' einer Potenzreihe

$$(R) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

Der Konvergenzradius der Reihe (R) ist ...

- ... 0, falls die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt ist.
- ... ∞, falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)
- ... $\frac{1}{L}$, falls $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$

Weitere Fälle gibt es nicht[7]. Beweis: Zu $0 \neq x \in R$ setze

$$b_n := \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$

Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt[8], so divergiert (R). Nehme daher $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als beschränkt an, d.j. $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

- Mit $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ist $|x| \cdot L = \limsup b_n$.
- Mit $L = 0 \Leftrightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$
- (R) konvergiert absolut, falls $|x| \cdot L < 1$ (äquivalent zu $|x| < \frac{1}{L}$ für $L > 0$).
- (R) divergiert, falls $|x| \cdot L > 1$ (äquivalent zu $|x| > \frac{1}{L}$).

[7] Literaturempfehlung: Forster (Wesentliches in Kürze), Königsberger („*Mein Liebling!*“) und „Kleine Enzyklopädie der Mathematik“

[8] „ich war gerade wieder in einem anderen Märchen...“

17.10 Konvergenzradius der Ableitung der Potenzreihe

Die Potenzreihen

$$(P) := \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \text{ und } (P') := \sum_{v=0}^{\infty} v a_v x^{v-1}$$

haben denselben Konvergenzradius.[9]

Beweis: Die Reihe (P') konvergiert für $x \neq 0$ genau dann, wenn $\sum\limits_{v=0}^{\infty} v a_v x^v$ konvergiert. Also hat (P') denselben Konvergenzradius wie die Reihe $(\tilde{P}) := \sum\limits_{v=0}^{\infty} v a_v x^v$.

Wegen $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ und $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (nach (9.12.3)) sind die Folgen $\left(\sqrt[n]{|na_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beide unbeschränkt oder beide beschränkt.

- beide unbeschränkt: Alles hat Konvergenzradius 0 nach (17.9).
- beide beschränkt: Nach (17.8) gilt:

  $$\limsup \sqrt[n]{|na_n|} = \left(\limsup \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

  Also nach (17.9): Konvergenzradius von (P') = Konvergenzradius von $(\tilde{P})$ = Konvergenzradius von (P)

17.11 Hauptsatz

Ist $r > 0$ (∞ ist zugelassen) der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v x^v$, so wird durch

$$f : (-r, r) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

eine differenzierbare Funktion definiert mit

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot a_v x^{v-1}$$

Beweis: Die abgeleitete Reihe konvergiert absolut auf $(-r, r)$ nach (17.10). Daraus folgt die Behauptung nach (16.9).

Beispiel:

[9] „...ein Ergebnis, das wir gleich ausschlachten werden!“

- Reihe: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+...$ für $|x| < 1$, also ist Konvergenzradius 1.
- Erstes Differenzieren: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$
- Zweites Differenzieren: $\frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 4x^3 + ...$

17.12 Die Binomialreihe

$$\begin{aligned}
(1+x)^p &= \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n \; \forall \; p \in \mathbb{N}_0, |x| < 1 \\
\binom{p}{n} &= \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot ... \cdot \frac{p-(n-1)}{n} \\
(1+x)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \; \forall \; |x| < 1
\end{aligned}$$

Die Bionialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ hat für $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ den Konvergenzradius 1.

Beweis: Setze $a_n := \binom{p}{n} |x^n|$. Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p-n}{n+1} |x|$, also

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim \left| \frac{p-n}{n+1} \right| |x| \cdot |-1| = |x|$$

Nach (17.7.2) konvergiert die Binomialreihe für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$.

17.13 Hauptsatz

Für $p \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ ist

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

Beweis: O.B.d.A ist $p \notin \mathbb{N}_0$. Erhalte aus (17.12) und (17.11) die Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \text{ und } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{p}{n} x^{n-1}$$

Wegen $\binom{p}{n} = \frac{p}{n}\binom{p-1}{n-1}$ ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p-1}{n-1} x^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^{n} \\
(1+x)f'(x) &= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} x^{n} + p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p-1}{n-1} x^{n} \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1} \right) x^{n} \\
&= p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^{n} \\
&= p \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Mit $g(x) = (1+x)^p$ ist auch $(1+x)g'(x) = pg(x)$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
&= \frac{p}{1+x} \cdot (fg - fg) \\
&= \frac{p}{1+x} \quad \text{konstant } \cdot 0 = 0 \\
f(0) &= 1 \\
&= g(0)
\end{aligned}$$

Damit sind beide Funktionen gleich: $f = g$

17.14 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe um a

1. Zu einer Potenzreihe $(P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ gibt es drei Fälle:
   (a) Konvergenz nur für $x = a$ (Konvergenzradius 0)
   (b) Absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ (Konvergenzradius ∞)
   (c) Es existiert $r > 0$ mit absoluter Konvergenz für $|x - a| < r$ und Divergenz für $|x - a| > r$ (Konvergenzdarius r)

2. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius.

3. Sei $r > 0$ der Konvergenzradius von (P). Setze $D = (a-r, a+r)$ (bzw. $D = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$). Dann definiere eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ und } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

4. In 3. ist $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ \forall\, n$.

5. $\forall\, m \in \mathbb{N}, a \neq x \in D$ gilt $\sum_{n \geq m} a_n(x-a)^n = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-a)^m$ für ein x_0 echt zwischen a und x.

„Beweis:“ 1-3 sind im Wesentlichen Umformulierungen von (17.6), (17.10) und (17.11). Nr. 4 folgt aus 2 und 3: $f(a) = a_0, f'(a) = a_1, f''(a) = 2! \cdot a_2, f'''(a) = 3! \cdot a_3, ...$; Nr. 5 folgt *sofort* aus dem Satz von Taylor.

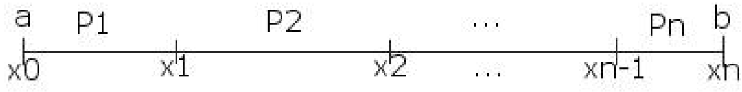
Bemerkung: Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f und $a \in D_f$ heißt die folgende Reihe Taylorreihe von f um a:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{f^{(v)}(a)}{v!}(x-a)^v$$

18 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Betrachte ein Intervall $D = [a, b]$ und eine beschränkte (später stetige) Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

- Betrachte weiter endliche Intervallzerlegungen $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ (und I endlich), das soll bedeuten: jedes P_i ist ein Intervall, $\bigcup P_i = D$ und $|P_i \cap P_j| \leq 1$ für $i \neq j$.



- Die Länge des Intervalls P_i sei d_i (in der Anschauung: $d_i = x_i - x_{i-1}$), somit gilt: $\Sigma d_i = b - a$.

- Setze weiter $m := \inf f(D)$ und $M := \sup f(D)$. Entsprechend $m_i := \inf f(P_i)$ und $M_i := \sup f(P_i)$.
- Setze die Untersumme $\mathcal{P}_* := \sum_i m_i \cdot d_i$ und die Obersumme $\mathcal{P}^* := \sum_i M_i \cdot d_i$
- Es gilt: $m \leq m_i \leq M_i \leq M$

18.1 Unter- und Obersummen

Für jede untere Schranke m von $f(D)$ und für jede obere Schranke M von $f(D)$ gilt:

$$m(b-a) \leq \mathcal{P}_* \leq \mathcal{P}^* \leq M(b-a)$$

18.2 Unter- und Obersummen unterschiedlicher Intervallzerlegungen

Ist $\mathcal{Q} = \{Q_j \mid j \in J\}$ eine weitere Intervallzerlegung von D, so ist auch die Menge $\mathcal{R}$ der Schnitte $R_{ij} = P_i \cap Q_j$ eine Intervallzerlegung von D. Zudem gilt:

$$\mathcal{Q}_* \leq \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \leq \mathcal{P}^* \text{ und } \mathcal{P}_* \leq \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \leq \mathcal{Q}^*$$

Beweis: Für festes $i \in I$ ist $\{R_{ij} \mid j \in J\}$ eine Intervallzerlegung von P_i. Es folgt $d_i = \sum_{j \in J} d_{ij}$. Wegen $R_{ij} \subseteq P_i$ ist $m_i \leq m_{ij}$ und $M_{ij} \leq M_i$. Erhalte

$$\begin{aligned} P_* &= \sum_i m_i \cdot d_i \\ &= \sum_i \left(m_i \cdot \sum_j d_{ij} \right) \\ &\leq \sum_{i,j} m_{ij} \cdot d_{ij} \\ &= \mathcal{R}_* \leq \mathcal{R}^* \end{aligned}$$

Alles andere analog.

18.3 Unter- und Oberintegral

Jede Untersumme ist eine untere Schranke der Menge aller Obersummen. Jede Obersumme ist eine obere Schranke aller Untersummen. Für das Supremum $\int_*$ (*Oberintegral*) aller Untersummen $\mathcal{P}_*$ und das Infimum $\int^*$ (*Unterintegral*) aller Obersummen $\mathcal{P}^*$ gilt: HONK!

$$m(b-a) \leq \int_* \leq \int^* \leq M(b-a)$$

Definition: Eine Funktion f heißt integrierbar genau dann, wenn[10] $\int^* = \int_*$ ist.

18.4 Zerlegung in Teilintegrale

Lemma: Für $a \leq u \leq b$ gilt:

$$\left[\int^* =\right] \int_a^b = \int_a^{u\,*} + \int_u^{b\,*}$$

Dasselbe gilt für $\int_*$. Folgerung: f ist integrierbar auf $[a,b]$ genau dann, wenn f integrierbar ist auf $[a,u]$ und $[u,b]$.

Beweis: Sei $D_1 = [a,u]$ und $D_2 = [u,b]$ Ist $\mathcal{Z}_1$ Zerlegung von D_1 und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegung von D_2, so ist $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ eine Zerlegung von D und es gilt: $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}_1^* + \mathcal{Z}_2^*$.

Mit $\mathcal{Q} = \{D_1, D_2\}$ sind diese $\mathcal{Z}$ genau die Zerlegung $\mathcal{R}$ in (18.2). Es folgt[11]:

$$\begin{aligned} \int^* &\overset{(18.2)}{=} \inf\{\,\mathcal{Z}^* \mid \mathcal{Z}\} \\ &= \inf\{\,\mathcal{Z}_1^* \mid \mathcal{Z}_1\} + \inf\{\,\mathcal{Z}_2^* \mid \mathcal{Z}_2\} \end{aligned}$$

18.5 Differenzierbarkeit der Stammfunktion

Ist f stetig in $u \in D$, ist die folgende Funktion differenzierbar:

$$F : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f : x \mapsto \int_a^{x\,*} f \text{ und } F'(u) = f(u)$$

Dasselbe gilt für $\int_*$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $|f(u+h) - f(u)| \leq \varepsilon$ (d.h. $f(u) - \varepsilon \leq f(u+h) \leq f(u) + \varepsilon$) für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ und $u + h \in D$.
Behauptung: $\left|\frac{F(u+h)-F(u)}{h} - f(u)\right| \leq \varepsilon$ für alle $h \neq 0$ wie oben.

Beweis: Fallunterscheidung:

[10] „...damit auch alles schön chaotisch wird...“
[11] „Es ist immer nur eins von beidem sinnvoll, das gilt - egal, was ich sage!“

1. Für $h > 0$: Nach (18.4) ist

$$\begin{aligned} F(u+h) &= \int_a^{u+h*} \\ &= \underbrace{\int_a^{u*}}_{=F(u)} + \int_u^{u+h*} \end{aligned}$$

Wende (18.3) and auf $[u, u+h]$ anstelle von $[a, b]$. Mit $f(u) - \varepsilon$ anstelle von m und $f(u) + \varepsilon$ anstelle von M. Erhalte

$$\begin{aligned} (f(u) - \varepsilon) \cdot h \leq & \quad \int_u^{u+h*} & \leq (f(u)+\varepsilon) \cdot h \quad (*) \\ f(u) - \varepsilon \leq & \quad \tfrac{1}{h} \cdot \int_u^{u+h*} & \leq f(u) + \varepsilon \\ -\varepsilon \leq & \quad \tfrac{1}{h} \cdot \int_u^{u+h*} - f(u) & \leq \varepsilon \\ \Rightarrow & \left| \tfrac{F(u+h)-F(u)}{h} - f(u) \right| & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

2. Für $h < 0$: Wende (18.4) auf $[u+h, u]$ an, erhalte wie oben

$$(f(u) - \varepsilon) \cdot (-h) \leq \int_u^{u+h*} \leq (f(u)+\varepsilon) \cdot (-h)$$

(18.4) liefert jetzt: $F(u) = \int_a^{u*} = \int_a^{u+h*} + \int_{u+h}^{u\ *}$, Rest analog.

18.6 Hauptsatz

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (mit $a < b$) ist integrierbar. Die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \int_a^b f$$

ist eine *Stammfunktion* (d.h. $F' = f$) und für jede Stammfunktion g von f ist

$$\int_b^a f = g(b) - g(a)$$

ZUSATZ: Sei D ein beliebiges Intervall. $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in D$ mit $x < a$ setze $\int\limits_a^x := -\int\limits_x^a$. Dann ist $F : x \mapsto \int\limits_a^x f$ ist $F' = f$.

BEWEIS: f ist beschränkt (nach Analysis1)[12]. Nach (18.5) hat f eine Stammfunktion g. Für F wie in (18.5) gilt: $F = g + k$ mit $k := -g(a)$ konstant.

$$\begin{aligned}
F(x) &= g(x) - g(a) \\
F(b) &= g(b) - g(a) \\
\int\limits_a^{b^*} &= g(b) - g(a) \\
\int\limits_{a_*}^{b} &= g(b) - g(a) \\
\Rightarrow \int\limits_{a_*}^{b} &= \int\limits_a^{b^*}
\end{aligned}$$

Damit ist f integrierbar.

BEWEIS ZUSATZ: Darf $D = [u, a]$ annehmen mit $u < a$. Für jedes $x \in D$ ist $\int_u^a = \int_u^x + \int_x^a$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
-F(u) &= \int\limits_u^x -F(x) \\
F(x) &= \int\limits_u^x f + F(u)
\end{aligned}$$

Wobei $\int\limits_u^x f$ nach Hauptsatz: differenzierbare Funktion von x mit Ableitung f.

Standardbezeichnung:

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

[12] „[verwirrt] Wo ist denn mein Hauptsatz?!“

Die Bezeichnung dx ist sinnvoll, siehe folgende Beispiele:

$$\int\limits_a^b 2xt\,dx \text{ und } \int\limits_a^b 2xt\,dt$$

18.6.1 Beispiel

Beispiel: $D = [0, b]$ mit $0 < b$, Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, definiere einfach so $f(0) := 5$. Also existiert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht! Für $0 < a < b$ ist f auf $[a, b]$ integrierbar, da stetig.

Außerdem (nach (18.3)) ist

$$(-1)(a-0) \leq \int\limits_{0\,*}^{a} \leq \int\limits_0^{a\,*} \leq (a-0)$$

Also $\int\limits_0^{a\,*} - \int\limits_{0\,*}^{a} \leq 2a$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{b\,*} - \int\limits_{0\,*}^{b} &\overset{(18.4)}{=} \int\limits_0^{a\,*} + \int\limits_a^{b\,*} - \int\limits_{0\,*}^{a} - \int\limits_{a\,*}^{b} \\
&= \int\limits_0^{a\,*} - \int\limits_{0\,*}^{a} \leq 2a \\
\int\limits_0^{b\,*} - \int\limits_{0\,*}^{b} &= 0
\end{aligned}$$

Also ist f integrierbar. **Merke:** Beim Integrieren kommt es auf die Endpunkte des Intevalls nicht an. Allgemeiner: Auf endlich viele Punkte kommt es nicht an wegen $\int_{a_0}^{a_n} = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i}$. Insbesondere: *Stückweise stetige* Funktionen sind integrierbar.

18.7 Uneigentliche Integrale

VORAUSSETZUNG: Sei $D := [a, b)$, $f : D \to \mathbb{R}$, integrierbar auf $[a, u]$ für alle $u \in D$.

DEFINITION: Falls der Limes existiert definiere:

$$\int\limits_a^b f := \lim_{u \to b} \int\limits_a^u f$$

Dabei ist auch $b = +\infty$ zugelassen. Analog für $D = (a, b]$, wobei auch $a = -\infty$ erlaubt ist:

$$\int_a^b f := \lim_{u \to a} \int_u^b f$$

Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ wähle ein beliebiges $c \in (a, b)$ und definiere entsprechend

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$$

18.7.1 Beispiel

Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$$

existiert für jede Zahl $s > 1$. Denn:

$$\int_1^u \frac{dx}{x^s} = \left(\underbrace{\frac{-1}{s-1} \cdot \frac{1}{x^{s-1}}}_{Stammfunktion} \right) \Bigg|_1^u = \frac{1}{s-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{u^{s-1}}\right)$$

18.8 Das Integralkriterium für Reihen

Voraussetzung: Sei $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_{\geq a} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, zudem f monton fallend und $I := \int\limits_a^\infty f$.

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ konvergiert gegen eine Zahl Z zwischen I und $f(a) + I$

Beispiel: Sei $a = 1$, $f(x) := \frac{1}{x^s}$, $s > 1$, $I = \frac{1}{s-1}$. Dann ist $Z = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^s}$ und $\frac{1}{s-1} \leq Z \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.

Bemerkung: $\zeta : s \mapsto Z$ ist die Riemannsche Zetafunktion Beweis: Schreibe wieder $\int$ statt $\int f$. Setze für $m \in \mathbb{N}$:

$$s_m := \sum_{n=0}^m f(a+m) \text{ und } I_m := \int_a^{a+m}$$

Wegen $f \geq 0$ ist $I = \sup\{I_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ und es genügt der Nachweis von $I_m \leq s_{m-1}$ und $s_m \leq f(a) + I_m$. Nach (18.3) ist für alle $n > 0$ (wegen monton fallend): $f(a+n+1) \leq \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \leq f(a+n)$. Weiter (nach (18.4)) ist

$$\begin{aligned}
I_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \leq \sum_{n=0}^{m-1} f(a+n) = s_{m-1} \\
I_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \int\limits_{a+n}^{a+n+1} \geq \sum_{n=0}^{m-1} f(a+n+1) = s_m - f(a) \\
\Rightarrow s_m &\leq I_m + f(a)
\end{aligned}$$

18.9 Triviale Folgerungen

Folgerungen aus der Definition der Ober- und Unterintegrale; seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $k \in \mathbb{R}$.

1. $f \geq g \Rightarrow \int^* f \geq \int^* g$ und $\int_* f \geq \int_* g$
2. $f \geq 0 \Rightarrow \int^* f \geq 0, \int_* f geq 0$
3. $k \geq 0 \Rightarrow \int^* kf = k \int^* f$ und $\int_* kf = k \int_* f$
   $k \leq 0 \Rightarrow \int^* kf = k \int_* f$ und $\int_* kf = k \int^* f$
4. $\int^* f + g \leq \int^* f + \int^* g$
   $\int_* f + g \geq \int_* f + \int_* g$

Somit ist mit f und g auch $f + g$ integrierbar, wobei $\int f + g = \int f + \int g$; und für jede reelle Zahl k ist auch kf integrierbar mit $\int kf = k \int f$.

18.10 Stetigkeit der Stammfunktion

1. Die Funktion F in (18.5) sind stetig, sogar gleichmäßig stetig, sogar Lipschitz-stetig, d.h. es existiert $L > 0$ mit

   $$|F(x) - F(y)| \leq L\,|x - y| \ \forall\, x, y \in D = [a,b]$$

2. Ist f stetig in $u \in D$ und $f(u) > 0$ sowie $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in D$, so ist $\int\limits_{a\ *}^{b} f > 0$.

Beweis:

1. $D = [a,b]$, $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt, $F(x) = \int\limits_a^{x*} f$ (bzw. Unterintegral).

   Sei $x \leq y$, dann ist $F(x) - F(y) \overset{(18.4)}{=} \int\limits_x^y f$. Zudem ist

$$m(y-x) \leq \int\limits_x^{y*} f \leq M(y-x)$$

   Es folgt

$$\left| \int\limits_x^{y*} f \right| \leq \underbrace{\max\{|M|, |m|\}}_{L} \cdot (y-x)$$

2. Es existiert ein Intervall P positiver Länge l_P mit $f(x) \geq q \; \forall \, x \in P$ für ein $q > 0$. Sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von $D = [a,b]$ mit $P \in \mathcal{P}$. Dann ist $\mathcal{P}_* \geq l_P \cdot q > 0$.

18.11 Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung

- VORAUSSETZUNG: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $m = \min f(D)$ und $M = \max f(D)$ (existieren nach (11.6.2))

  BEHAUPTUNG: Gewöhnlicher Mittelwertsatz[13]: Es existiert $u \in D$ mit $\int\limits_a^b = f(u) \cdot (b-a)$

- VORAUSSETZUNG: Sei zuätzlich $g : D \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $g(x) \geq 0 \; \forall \, x \in D$.

  BEHAUPTUNG: Verallgemeinerter Mittelwersatz: Es existiert $u \in D$ mit $\int\limits_a^{b*} fg = f(u) \cdot \int\limits_a^b g$ (analog für ein u' für $\int_*$)

  BEWEIS: Wegen $mg \leq fg \leq Mg$ ist

$$\int\limits_a^{b*} mg \leq \int\limits_a^{b*} fg \leq \int\limits_a^{b*} Mg$$

[13] Anekdote aus seiner Vorlesungezeit... „Das war das letzte Mal, daß ich das Maul aufgemacht habe!“

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^{b^*} fg \leq M \cdot \int_a^b g$$

Darf also $G := \int_a^b g \neq 0$ annehmen, sogar $G > 0$. Erhalte

$$m < \frac{1}{G} \cdot \int_a^b fg \leq M$$

Mit Zwischenwertsatz ((11.6.1)) existiert $u \in [a, b]$ mit $f(u) = \frac{1}{G} \int^* fg$

- Bemerkung: Man kann zeigen: Aus der Integrierbarkeit von f und g folgt: fg ist integrierbar.

18.12 Die Taylorformel mit Integral

VORAUSSETZUNG: Sei D Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ sie $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, sei $a \in D$, $n \in \mathbb{N}_0$. Definiere $R := R_{n+1} = R_{n+1}(x)$ für $x \in D$ durch

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \right) + R = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R$$

BEHAUPTUNG: $R = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

BEWEIS: Induktion nach n:

- Induktionsanfang: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ (nach (18.6), denn f' ist stetig)

- Induktionsannahme: Sei also $n \geq 1$ und $R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$

- Induktionsschluß: Für $g_n(t) := \frac{(x-t)^n}{n!}$ ist $g_n' = -g_{n-1}$. Die stetige Funktion $g_n f^{(n+1)}$ (auf D) hat eine Stammfunktion F. Dann ist

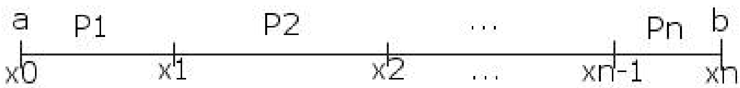
$$\left(F - g_n f^{(n)}\right)' = g_n f^{(n+1)} - g_n \cdot f^{(n+1)} + g_{n-1} \cdot f^{(n)} = g_{n-1} f^{(n)}$$

Es folgt mit (18.6):

$$\begin{aligned}
\left(F - g_n \cdot f^{(n)}\right)\Big|_a^x &= \int\limits_a^x g_{n-1} f^{(n)} = R_n \\
&= F(x) - F(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \\
&= \int\limits_a^x g_n f^{(n+1)} + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \\
&= R + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

18.13 Riemannsche Summen

Betrachte Funktion f und Zerlegung



$P_i = [a_{i-1}, a_i]$, $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$; $d_i = a_i - a_{i-1}$. Betrachte *Riemannsche Summen*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) d_i \text{ mit } x_i \in P_i$$

Dann gilt:

$$\mathcal{P}_* \leq S \leq \mathcal{P}^*$$

Definition: Feinheit von $\mathcal{P} := \max\{d_i \mid i = 1, ..., n\}$

Satz: Genau dann ist f integrierbar auf $[a, b]$ und es existiert damit $\int\limits_a^b f$, wenn ein I existiert, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|S - I| < \varepsilon$ für alle Riemannschen Summen S zu allen Zerlegungen $\mathcal{P}$ mit Feinheit $< \delta$.

18.14 Stammfunktion auf (nicht-)kompakten Intervall

Voraussetzung: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g' = f$ auf (a, b)

Behauptung: $g' = f$ auch auf $[a, b]$

Beweis: Existiert die Stammfunktion F von f nach (18.6). Dann ist $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) + c = g(x)$ für alle

$x \in (a,b)$. Ersetze F durch $F+c$. Dann ist $F(x) = g(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zudem ist $g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} F(x) = F(a)$, analog für $F(b)$.[14]

19 Bestimmung „des unbestimmten Integrals" einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Gesucht: Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g' = f$. Schreibe $\int f = g$ oder $\int f(x)\,dx = g(x)$ oder $\int f(x)\,dx = g(x) + c$ (c konstant). Nenne g *unbestimmtes Integral* von f. Gegenstand von (18) war das *bestimmte Integral*. Einfachste Ingegralrechenregeln:

$$\int f_1 + f_2 = \int f_1 + \int f_2 \text{ und } \int kf = k\int f \quad (k \in \mathbb{R})$$

19.1 Integrationsmethoden

19.1.1 Partielle Integration

Regel: Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ folgt:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Beispiele:

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)\cdot e^x$
2. $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2-2x+2)\cdot e^x$ (und analog für beliebige $\int x^ne^x\,dx$)
3. $\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx = x\cdot\sin x + \cos x$

[14] „Warum ist die Funktion stetig? Weil sie differenzierbar ist! Wenn man keine Antwort weiß, stimmt diese Antwort in 70% der Fälle!"

4. Auf $(-1,1)$ (und damit nach (18.14) auch auf $[-1,1]$) gilt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \sqrt{1-x^2}\cdot x - \int \underbrace{\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}}_{f'} \cdot x\,dx \\
&= \sqrt{1-x^2}\cdot x + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{1-x^2}\cdot x + \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)\,dx \\
\Rightarrow 2\cdot \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \sqrt{1-x^2}\cdot x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sqrt{1-x^2}\cdot x + \arcsin x
\end{aligned}$$

Anwendung von Beispiel 4: Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius 1 um den Ursprung ist gleich $\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot(\arcsin 1 - \arcsin -1) = \frac{\pi}{2}$

19.1.2 Integration durch Substitution

Um $\int f(x)\,dx$ zu bestimmen, setze für x irgendeine Funktion einer neuen „Variablen“ t ein, ersetze dx durch $\frac{dx}{dt}\cdot dt$, bestimme das Integral $\int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$ und drücke dann wieder t durch x aus.

Begründung: Seien D, D^* Intervalle, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D^* \to D$ bijektiv, differenzierbar und $g'(t) \neq 0\ \forall\ t \in D^*$ mit Umkehrfunktion $u : D \to D^*$. Sei weiter G Stammfunktion der Funktion $t \mapsto f(g(t))g'(t)$. Definiere zudem $F : D \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto G(u(x))$.

Behauptung: $F' = f$

Beweis[15]: $F'(x) = G'(u(x))\cdot u'(x) = f(\underbrace{g(u(x))}_{=x})\cdot \underbrace{g'(u(x))\cdot u'(x)}_{=1} = f(x)$

Beispiel:

[15] „Die Tafel harmoniert nicht so ganz mit der Kreide!“

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Substituiere[16] $x = \sin t$. Also: $\frac{dx}{dt} = \cos t$. Erhalte[17]:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt \\
&= \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2t \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\underbrace{\sin t}_{x} \cdot \underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

19.1.3 Partialbruchzerlegung

Integration rationaler Funktionen $\frac{h}{f}$ (mit h, f Polynomfunktionen) mittels *Partialbruchzerlegung*. Es genügt der Fall[18] $\operatorname{grad} h < \operatorname{grad} f$. Dann existieren Polynome h^*, r mit

$$h = h^* f + r \text{ und } \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f \quad \text{(Division mit Rest)}$$

VORAUSSETZUNG: K ist Körper, $f \in K[x]$ Polynom, normiert; $f = f_1 \cdots f_n$ und $f_i = p_i^{e_i}$ mit $e_i \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_n$ normiert, irreduzibel und paarweise verschieden. $0 \neq h \in K[x]$.

BEHAUPTUNG:

1. Es existieren $h_1, ..., h_n \in K[x]$ mit $\operatorname{grad} h_i < \operatorname{grad} f_i$ und es gilt:

$$\frac{h}{f} = \frac{h_1}{f_1} + \frac{h_2}{f_2} + ... + \frac{h_n}{f_n}$$

2. Sei nun $n = 1$. Setze $p = p_1$, $e = e_1$. Dann existieren $u_1, ..., u_e$ mit $\operatorname{grad} u_i < \operatorname{grad} p$ und es gilt:

$$\frac{h}{f} = \frac{u_1}{p} + \frac{u_2}{p^2} + ... + \frac{u_e}{p^e}$$

3. Zusatz: die h_i und u_i sind eindeutig bestimmt

[16] „...genial, wie ich bin...“
[17] mit Additionstheoremen $\cos 2t + 1 = 2\cos^2 t$ und $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$
[18] definiere hierfür $\operatorname{grad} 0 = -1$

Beweis:

1. Definiere Polynome $g_1, ..., g_n$ durch
$$g_j := \prod_{i \neq j} f_i = \frac{f}{f_j}$$
Polynome $g_1, ..., g_n$ sind teilerfremd[19]. Man kann h_i wählen, so daß gilt:
$$h = h_1 g_1 + ... + h_n g_n \text{ mit } h_j \in K[x]$$
Also gilt:
$$h = \frac{h_1}{f_1} + ... + \frac{h_n}{f_n}$$
Die h_i können so gewählt werden, daß $\operatorname{grad} h_i < \operatorname{grad} f_i$ ist, denn mit Division von h_i in $h_i = q_i f_i + r_i$ erhält man
$$\frac{h}{f} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i}_{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{f_i}$$
Falls $s \neq 0$, so ist
$$h = \underbrace{sf}_{grad \geq gradf} + \underbrace{\sum \frac{f}{f_i} r_i}_{grad < gradf}$$
Damit ist $s = 0$. Somit sind die h_i gefunden wie gewünscht.

2. Es ist $f = p^e$. Schreibe $h = qp + r$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p$. Dann ist $\frac{h}{f} = \frac{q}{p^{e-1}} + \frac{r}{p_e}$. Im Falle $q = 0$ ist nichts zu zeigen, bei $q \neq 0$ ist
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{grad} q &=& \operatorname{grad} h - \operatorname{grad} p \\ &<& \operatorname{grad} f - \operatorname{grad} p \\ &=& (e-1) \cdot \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} p^{e-1} \end{array}$$
Weiter mit Induktion nach e.

3. Beweis siehe Lineare Algebra

Irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$ haben einen grad 1 oder grad 2 (Beweis später). Damit wird die integrierbare rationale Funktion zurückgeführt auf folgende Fälle:

[19] „Ich bin so klein, die Tafel ist so groß...“

(1) $\int \frac{1}{(x+a)^m}\,dx$

(2) $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m}\,dx$

(3) $\int \frac{x+c}{(x^2+ax+b)^m}\,dx$

Dabei ist x^2+ax+b irreduzibel über $\mathbb{R}$. Wegen $x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a^2}{4}\right)$ ist $b-\frac{a^2}{4} > 0$, also $x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + d^2$ mit $d>0$. Es genügt also, statt (2) und (3) folgende zu betrachten:

(2′) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^m}\,dx$

(3′) $\int \frac{x+c}{(x^2+a^2)^m}\,dx$

Dabei kann noch $a=1$ angenommen werden, da $x^2+a^2 = a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)$. Zudem läßt sich bei (3′) das c durch Fall (2′) erledigen. Damit ergibt sich:

(2″) $\int \frac{1}{(x^2+1)^m}\,dx$

(3″) $\int \frac{x}{(x^2+1)^m}\,dx$

Die Funktion $\log|x|$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert und hat die Ableitung $\frac{1}{x}$. Damit gilt für die Fälle $(1), (2'')$ und $(3'')$:

(1) $\int \frac{dx}{(x+a)^m} = \begin{cases} \log|x+a| & \text{falls} \quad m=1 \\ \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{m-1}} & \text{falls} \quad m\geq 2 \end{cases}$

(2″) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{falls} \quad m=1 \\ \frac{1}{2(m-1)}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+1)^{m-1}} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}}\right) & \text{falls} \quad m\geq 2 \end{cases}$

(3″) $\int \frac{2x}{(x^2+1)^m}\,dx = \begin{cases} \log(x^2+1) & \text{falls} \quad m=1 \\ \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} & \text{falls} \quad m\geq 2 \end{cases}$

Beispiel:

1. Sei $f(x) = (x-1)^3\cdot x^2\cdot(x^2+1)^2$ und $h(x)$ mit $\operatorname{grad} h < 9$. Dann ist
$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{e} + \frac{e}{x^2} + \frac{u}{x^2+1} + \frac{v}{(x^2+1)^2}$$
mit $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ und u,v Polynome vom Grad ≤ 1. Weiter:
$$\frac{u}{x^2+1} = \frac{s}{x^2+1} + \frac{tx}{x^2+1}$$
mit $s,r\in\mathbb{R}$ und analog für v.

2. konkreter: $\frac{1}{x^3-4x} = \frac{1}{x(x-2)(x+2)}$ ergibt

$$\frac{1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

- Multipliziere mit x, setze $x = 0$, erhalte $a = -\frac{1}{4}$.
- Multipliziere mit $(x-2)$, setze $x = 2$, erhalte $b = \frac{1}{8}$.
- Multipliziere mit $(x+2)$, setze $x = -2$, erhalte $c = \frac{1}{8}$.

Entsprechend:

$$\int \frac{1}{x^3 - 4x} = \left(-\frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \int \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \int \frac{1}{x+2}\right)$$

3. Sei $\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}$ gegeben. Dann ist in den reellen Zahlen die folgende Zerlegung möglich:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+1} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

In den komplexen Zahlen:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{s}{x+i} + \frac{t}{x-i} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } s, t \in \mathbb{C}$$

- Multipliziere die Gleichung mit $(x-1)^2$ und setze $x = 1$, erhalte $b = \frac{1}{2}$
- durch weiteres Einsetzen bzw. Multiplizieren erhält man direkt Werte oder Gleichungssysteme für die Variablen a, b, c, d bzw. a, b, s, t:

$$x^3 = a(x-1)(x^2+1) + b(x^2+1) + cx(x-1)^2 + d(x-1)^2$$

- Konstante Glieder der Gleichung: $0 = -a + b + d$
- Glieder der Potenzen 1, 2...
- Glieder der Potenz 3: $1 = a + c$

19.2 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium

Definition: Eine Menge X heißt Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ offene Intervalle $X_1, X_2, X_3, \ldots$ existieren mit $X_i = (a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq \varepsilon$ (die Menge der rationalen Zahlen und jede abzählbare Menge reeller Zahlen ist eine Nullmenge!). Satz: Genau dann ist die beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, wenn die Menge $\Delta = \{x \in [a, b] \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$ eine *Nullmenge* ist. Beweis: siehe Zusatz-Vorlesung

20 Gleichmäßige Konvergenz

20.1 Definition gleichmäßige Konvergenz

Betrachte[20] Folge $f_1, f_2, f_3, ...$ oder eine Reihe $f_1 + f_2 + f_3 + ...$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktion f, d.h.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall\ x \in D \quad \text{bzw.} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ \forall\ x \in D$$

Beispiel: $f_n(x) = x^n$ für $D = [0,1]$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x < 1 \end{cases}$$

Dann ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Jedes f_n ist stetig, aber: die Grenzfunktion f ist nicht stetig.

Definition: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für fast alle n und alle $x \in D$.

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann wenn $|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| < \varepsilon$ für fast alle n und alle $x \in D$.

20.2 Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz: Der gleichmäßige Limes einer Folge oder Reihe stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.

Beweis: Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ gleichmäßiger Limes, seien die f_n stetig. Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\ x \in D$$

Da f_n stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|f_n(a) - f_n(x)| < \varepsilon\ \forall\ x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta$$

Für diese x folgt:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x)| &= |f(a) - f_n(a) + f_n(a) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

[20] Kommentar zum begrenzten Tafelplatz: „In der Beschränktheit zeigt sich erst der Meister!“

20.3 Vertauschen von Integral und Limes

Voraussetzung: Seien f_n integrierbar auf $D = [a,b]$. Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

Behauptung: f ist integrierbar mit

$$\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle x für fast alle n, d.h.

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

Damit ist f beschränkt. Mit (18.9)(a) folgt:

$$\int (f_n - \varepsilon) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int (f_n + \varepsilon)$$

Damit ist

$$\int f_n - \varepsilon \cdot (b-a) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \int f_n + \varepsilon \cdot (b-a)$$

und es folgt:

$$\left| \int_* f - \int^* f \right| \leq \varepsilon(b-a) \Rightarrow \int_* f = \int^* f$$

und zudem

$$\left| \int f - \int f_n \right| < \varepsilon 2 \cdot (b-a) \text{für fast alle} n$$

20.4 Vertauschen von Ableitung und Limes

Voraussetzung: Seien $f_1, f_2, ...$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$, konvergiere $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und konvergiere $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ fÜr ein $x_0 \in D$

Behauptung: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig mit

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$$

Für Reihen analog: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig mit

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f'_i$$

Beweis: Sei $g_n := f_n'$ stetig. Damit ist $g_n := \lim_{n\to\infty} g_n$ stetig. Für jedes $x \in D = [a,b]$ gilt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} g_n$$

Nach Hauptsatz (18.6) gilt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g_n = f_n(x) - f_n(x_0)$$

Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$, Erhalte $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Mit $k_n := f_n(x_0)$ und $k := f(x_0)$ folgt:

$$\int\limits_{x_0}^{x} g = f(x) - k$$

Nach Hauptsatz der Integralrechnung (18.6) gilt:

$$(f-k)' = g \Rightarrow f' = g$$

Es bleibt zu zeigen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig*. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} g - \int g_n + k - k_n \right| \\
&\leq \underbrace{\left| \int\limits_{x_0}^{x} (g - g_n) \right|}_{<\varepsilon\text{ffan } \forall\, y \in D} + \underbrace{|k - k_n|}_{<\varepsilon\text{ffan}} \\
\Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} g - g_n &\leq \varepsilon \cdot |x - x_0| \\
&\leq \varepsilon \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Erhalte $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \dot{(} b-a) + \varepsilon$ für fast alle n., damit ist f der gleichmäßige Limes von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20.5 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Satz:

1. Für Folgen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ für fast alle p, q und alle x gilt:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

2. Für Reihen: $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ für fast alle m, p und alle x gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f_{p+i}(x)\right| \leq \varepsilon$$

Beweis: Teil 1 genügt.

„$\Leftarrow$" Für festes x ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, konvergiert also. Setze $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Sei $\varepsilon > 0$, es existiert n mit $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ für alle $p, q \geq n$.

Behauptung: $|f(x) - f_p(x)| \leq 2\varepsilon$ für alle x und $p \geq n$.

Wähle dazu bei festem x die Zahl $q \geq n$ so, daß $|f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_p(x)| &= |f(x) - f_q(x) + f_q(x) - f_p(x)| \\ &\leq |f(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f_p(x)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$" Sei $f = \lim_{n\to\infty} (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Für fast alle p, q ist

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \;\forall\, x \text{ und } |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \;\forall\, x$$

Also:

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &= |f(x) - f_g(x) + f_p(x) - f(x)| \\ &= |f(x) - f_g(x)| + |f_p(x) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

20.6 Weierstrass-Kriterium

Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ konvergiert gleichmäßig, falls $L_n \geq 0$ existieren mit

- $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ konvergent
- $|f_n(x)| \leq L_n \; \forall \; n, x$

Dann heißt $\sum\limits_{v=0}^{\infty} f_v$ *normal konvergent.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert q mit $\sum_{n=q}^{\infty} L_n \leq \varepsilon$. Erhalte

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{m} f_{p+i}(x) \right| &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_{p+i}(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} L_{p+i} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $p \geq q$ und alle m. Wende (20.5) an. Beispiel:

1. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v x^v$ mit Konvergenzradius r ist normal konvergent auf $D = [-a, a]$ für alle $a \in (0, r)$

   Beweis: es existiert y mit $a \leq y < r$. Setze $L_n = |a_n| \, |x^n|$, dann ist $|a_n x^n| \leq L_n \; \forall \; x \in D$. Wegen $|x| < |y|$ ist $\sum\limits_{v=0}^{\infty} L_v = \sum\limits_{v=0}^{\infty} |a_v y^v|$ konvergent.

2. Die Reihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v^2} \sin(v^2 x)$ ist normal konvergent mit $L_n = \frac{1}{n^2}$. $\sum_{n=0} \infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach (18.8).

3. Die *Tagaki-Funktion*, seien f_n definiert durch folgenden Graphen:

   Behauptung:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{gleichmäßig konvergent}$$

   Beweis: Wende das Weierstrasskriterium an mit L_n mit $L_n = \frac{1}{2} 4^{-n}$ ($\sum L_n$ ist geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{4}$), also: f ist stetig (20.2).

   Aber: f ist nirgends differenzierbar. !

   Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Wähle $h_n = \pm \frac{1}{4} 4^{-n}$, so daß f_n zwischen x und $x + h_n$ linear verläuft. Das gilt dann auch für alle f_k mit $k \leq n$, und es folgt:

$$\frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \pm 1$$

Wäre f in x differenzierbar, so wäre

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n}}_{\pm 1 \pm 1 ... \pm 1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n}}_{(*)=0}
\end{aligned}$$

Das ist jedoch ein Widerspruch, der Limes existiert also nicht, da $\pm 1 \pm 1 + ... +$ nicht konvergiert.

Beweis der Behauptung $(*)$: f_n ist periodisch mit Periode 4^{-n}, f_k ist periodisch mit Periode $4^{-k} = \frac{1}{z} 4^{-n}$ für ein $z \in \mathbb{N}$, also: f_k periodisch mit Periode 4^{-n}. Damit ist f_{n+1} periodisch mit Periode h_n, damit auch f_k für alle $k \geq n+1$, d.h. $f(x+h_n) - f_k(x) = 0$.

21 Normierte Räume

21.1 Definition

- Definition: Ein *normierter Raum* (über $\mathbb{R}$) ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einer *Normfunktion* $N : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Normfunktion bedeutet: Für alle $v, u \in V$ gilt:

  1. $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  2. $N(kv) = |k|\, N(v) \; \forall\, k \in \mathbb{R}$
  3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$

  Übliche Bezeichnung für N: $|v|$ oder $\|v\|$

- Ein normierter Raum V ist auch ein Metrischer Raum: $d(u, v) := N(u - v)$ ist eine Metrik auf der Menge V (folgt genau wie für $V = \mathbb{R}$).

- Definition: Normen N, N' auf V heißen *äquivelent* genau dann, wenn $r, r' > 0$ existieren mit

$$N(v) \leq r' N'(v) \wedge N'(v) \leq r N(v) \; \forall\, v \in V$$

Äquivalente Normen führen zu demselben Umgebungsbegriff, also zu demselben Konvergenzbegriff in V:

$$U_\varepsilon(v) = \{ u \in V \mid N(u-v) < \varepsilon \} \subseteq \{ u \in V \mid N'(u-v) < r'\varepsilon \} = U'_{r'\varepsilon}(v)$$

Das gilt auch für Cauchyfolgen und gleichmäßige Stetigkeit.

21.2 Die Supremumsnorm

- Sei $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ (also ein Teilraum von $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$). Die *Supremumsnorm* auf $V = \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ist definiert als:

  $$\|f\| = \|f\|_D = \sup\{ |f(x)| \mid x \in D \}$$

  Bemerkung: Man kann $\mathbb{R}^n$ als $\mathcal{F}(\{1,...,n\},\mathbb{R})$ auffassen, dann ist $\|f\|_D = \|f\|_\infty$.

- Frage: Was bedeutet $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ für $f, f_1, f_2, ... \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$?

  $$\forall\, \varepsilon > 0\, f.f.a.\, n \;:\; \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

  Nach (20.5) gilt: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ genau dann, wenn für alle

  $$\forall\, \varepsilon > 0\, f.f.a.\, p,q \;:\; \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$$

  Das bedeutet: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge; jede Cauchyfolge in $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ konvergiert und damit ist $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ vollständig.

- Definition: Ein *Banachraum* ist ein vollständiger, normierter Raum.

  Satz: In jedem Banachraum gilt: Wenn eine Reihe absolut konvergent, ist sie auch konvergent. Für $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ist das das Weierstrass-Kriterium (20.6).

- Sei $D = [a,b]$. Dann ist $\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ein Teilraum von $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ (Satz von Minimum und Maximum). Außerdem ist $\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ ist ebenfalls ein Banachraum, denn nach (20.2) ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ stetig für jede in $\mathcal{B}$ konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}$.

- Sei $D = [a,b]$. Dann ist $\mathcal{R} := \mathcal{R}(D,\mathbb{R})$ die Menge der integrierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$

  Lemma: Die Abbildung

  $$\mathcal{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f \mapsto \int_a^b f$$

ist stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{R}$. Gesucht: Ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_a^b - \int_a^b g \right| \leq \varepsilon \; \forall \, g \in \mathcal{R} \text{ mit } \|f - g\|_D \leq \delta$$

Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{b-a}$ gilt: Aus $|(f-g)(x)| \leq \delta \; \forall \, x \in D$ folgt: $\left| \int_a^b (f-g) \right| \leq (b-a)\delta = \varepsilon$

21.3 $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

Definiere Normen für $\mathbb{R}^n$:

- 1-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j|$
- 2-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_j|^2}$
- (p-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}$)
- ∞-Norm: $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty = \max \{ |a_i| \mid i = 1, ..., n\}$

Bemerkung: $\forall \, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

Also: Diese drei Normen sind äquivalent[21], aber die 2-Norm ist die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$, da $\|a\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ die Distanz zwischen 0 und a angibt und $\|a-b\|_2$ die Distanz zwischen a und b.

21.3.1 Konvergenz in jeder Komponente

Sei $V = \mathbb{R}^n$, sei $\|v\| := \|v\|_p$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

- Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ Schreibe $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$. Genau dann konvergiert $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $a = (a_1, ..., a_n)$, wenn $\lim_{i \to \infty} x_{ij} = a_j$ für $j = 1, ..., n$.

  Beweis: Es genügt, die ∞-Norm zu betrachten.

[21] später folgt noch: alle Normen des $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

„⇐“ VORAUSSETZUNG: $\lim_{i\to\infty} x_{ij} = a_j$ für alle $j = 1, ..., n$. Sei $\varepsilon > 0$. Für $j = 1, ..., n$ und fast alle i ist $|a_j - x_{ij}| < \varepsilon$ Für diese i folgt:

$$\|a - x_i\|_\infty = \max |a_j - x_{ij}| < \varepsilon$$

„⇒“ VORAUSSETZUNG: $\lim_{i\to\infty} x_i = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\|a - x_i\| < \varepsilon$ für fast alle i. Allgemein gilt für alle drei Normen: $\|(r_1, ..., r_n)\| \geq |r - j|$ für $j = 1, ..., n$. Es folgt:

$$|a_j - x_{ij}| \leq \|a - x_i\| < \varepsilon \, f.f.a.\, i$$

- Analog gilt für einen metrischen Raum M und für Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^n$:

  $$\lim_{x\to u} f(x) = (a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow \lim_{x\to u} f_j(x) = a_j \;\forall\, j \in \{1, ..., n\}$$

  Dabei sind $f_1, ..., f_n$ die sogenannten *Koordinatenfunktionen* von f, definiert durch $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Zudem: Genau dann ist f stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen stetig sind.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge genau dann, wenn $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist für jedes $i \in 1, ..., n$.

21.3.2 Vollständigkeit

$\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

21.3.3 Bolzano-Weierstrass

In $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von Bolzano-Weierstrass, d.h. jede beschränkte Folge und jede beschränkte unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt. *Andere Formulierung:* Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist folgenkompakt.

BEWEIS: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, abgeschlossen. Dann existiert $r > 0$ mit $\|x\| \leq r \;\forall\, x \in X$. Setze $W = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \mid |a_i| \leq r \;\forall\, i\}$ (sozusagen ein n-dimensionaler Würfel um den Ursprung). Dann ist $X \subseteq W$. Es genügt zu zeigen: W ist folgenkompakt (denn X abgeschlossen).

Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in W. Will (21.3.1) anwenden. Dann ist $(x_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-r, r]$, hat also einen Häufungspunkt a_1 in $[-r, r]$ (denn $\mathbb{R}$ ist folgenkompakt). Dann ist a_1 Limes einer Teilfolge.

Ersetze $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die entsprechende Teilfolge. Dann ist a_1 Limes der

Folge $(x_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$. Analog für $(x_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$, ersetze $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine Teilfolge, so daß $a_2 = \lim_{n\to\infty} x_{n2} \in [-r, r]$ existiert.

Ersetze analog für alle Koordinatenfolgen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine entsprechende Teilfolge, bis $a_1, a_2, ..., a_n \in [-r, r]$ existieren mit (nach (21.3.1)):

$$(a_1, ..., a_n) = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} (x_{i1}, ..., x_{in})$$

21.3.4 Satz vom Maximum und Minimum

VORAUSSETZUNG: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, beschränkt, abgeschlossen, nicht leer. $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.

BEHAUPTUNG: $f(X)$ hat ein Maximum und ein Minimum. BEWEIS: X ist folgenkompakt nach (21.3.3), also ist $f(X)$ folgenkompakt (11.7), somit beschränkt und abgeschlossen (gilt allgemein in metrischen Räumen).

21.3.5 Äquivalenz aller $\mathbb{R}^n$-Normen

SATZ: Alle Normen eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Raumes sind äquivalent.

BEWEIS: Es genügt, $\mathbb{R}^n$ zu betrachten. Sei N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die ∞-Norm, es genügt zu zeigen: N ist äquivalent zur ∞-Norm.

Setze $c = \sum_{i=1}^n N(e_i)$. Für $x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ folgt:

$$\begin{aligned} N(x) &\leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|\, N(e_i) \\ &\leq \max\{\, |x_i| \mid i = 1, ..., n\} \cdot \sum_{i=1}^n N(e_i) \\ &= \|x_i\| \cdot c\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$c > 0$, da $n \geq 1$, d.h. $\mathbb{R}^n \neq 0$. Wende (21.4) an, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq c \cdot \|x - y\|$$

Also: $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig[22] mit $L = c$ bezüglich der ∞-Norm.

Setze $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, W ist beschränkt und abgeschlossen. Damit hat $N(W)$ ein Minumum $N(u) =: d$ (nach (21.3.4)).

[22] „... das ist das Tollste, was es so an Stetigkeit gibt!“

Wir haben $d > 0$, denn sonst wäre $u = 0$, also $0 = \|u\| = 1$.Für jedes Element $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
N(x) &= N\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \\
&= \Big|\|x\|\Big| \cdot N\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\
&= \|x\| \cdot \underbrace{N\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\in W} \\
&\geq \|x\| \cdot d
\end{aligned}$$

Erhalte:

$$d \cdot \|x\| \leq N(x) \leq c \cdot \|x\| \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Also ist die Normfunktion N äquivalent zur ∞-Norm, damit sind alle Normen äquivalent.

21.4 Allgemeine Regel für normierte Räume

In normierten Räumen gilt:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Besser:

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$$

Diese Ungleichung bedeutet: Die Abbildung $V \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \|x\|$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|y + x - y\| \\
&\leq \|y\| + \|x - y\| \\
\Rightarrow \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\| \\
\Rightarrow \|y\| - \|x\| &\leq \|y - x\| \\
&= \|x - y\|
\end{aligned}$$

21.5 Vollständigkeit jedes endlichen normierten Raumes

Jeder endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

21.6 Differenzierbare und Integrierbare Funktionen

Sei $f : D \to V$ (wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ und V ein normierter Raum).

- Jedes $x \in D$ sei Häufungspunkt von D. Definition: Falls der Limes existiert, ist
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (f(x+h) - f(x))$$

- Sei $D = [a,b]$ und $I \in V$. Definition[23]:
$$\int_a^b f = I :\Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \text{ mit } \left\| I - \underbrace{\sum_i f(x_i) d_i}_{\text{Riemannsche Summe}} \right\| \leq \varepsilon$$
für jede Zerlegung $\mathcal{P} = \{ P_i \mid i \in I \}$ von $[a,b]$ mit der Feinheit[24] kleinergleich δ und jede Wahl von $x_i \in P_i$.

- Sei $V = \mathbb{R}^n$. Analog (21.3.1) ist f genau dann differenzierbar bzw. integrierbar, wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, ..., f_n$ es sind, und es gilt:
$$f'(x) = (f_1'(x), ..., f_n'(x)) \text{ und } \int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, ..., \int_a^b f_n \right)$$
Die einfachsten Grundregeln bleiben richtig, ebenso der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Weiter[25]:
$$f' = 0 \Rightarrow f \text{ konstant}$$

21.7 Skalarprodukt

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Ein *positives definites Skalarprodukt* auf V ist eine symmetrische bilineare Abbildung
$$f : V \times V \to \mathbb{R} \text{ mit } f(v,v) \geq 0 \ \forall\, v \in V \text{ und } f(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$
Bezeichnung: $\langle u, v \rangle$ oder $u \cdot v$.

[23] vergleiche hier mit (18.13)

[24] also $d_i = |P_i| \leq \delta \ \forall\, i$

[25] „Wenn Sie sich nicht erinnern: Der Mittelwertsatz besagt, daß irgendso'n Punkt existiert, für den irgendwas gilt...“

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$(a_1, ..., a_n) \cdot (b_1, ..., b_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Für jedes Skalarprodukt gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$(uv)^2 \leq (uu)(vv) \quad \text{bzw.} \quad \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

und folgendes ist eine Normfunktion auf V:

$$\|x\| = \sqrt{c \cdot c}$$

wobei dies im Falle des Standardskalarprodukts die 2-Norm ist. Dabei:

$$|uv| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

- Noch ein Beispiel[26]: Sei $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (Menge der stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$). Definiere

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b fg$$

Dann ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2}$$

Die daraus abgeleitete Norm ist die L_2-Norm[27]:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

[26] beachte (18.10)(b)

[27] In den Übungsaufgaben kam die L_1-Norm vor!

22 Die komplexen Zahlen

22.1 Definitionen

- $\mathbb{C}$ „=“ $\mathbb{R}^2$ mit folgender Multiplikation mit Einselement $(1,0)$:
$$(a,b)\cdot(a',b') := (aa'-bb', ab'+ba')$$
- „identifiziere“ $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0)$, dann ist $(a,b) = (a,0)+(b,0)\cdot i = a+bi$
- Die komplexen Zahlen bilden einen Körper $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper. Als $\mathbb{R}$-Raum hat $\mathbb{C}$ die Dimension 2. Es gibt ein $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Die Menge $\{1, i\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$.
- Notation:
$$z = x+iy \text{ mit } x = \mathrm{Re}(z) = \Re(z) \text{ und } x = \mathrm{Im}(z) = \Im(z) \text{ mit } x,y \in \mathbb{R}$$
Erhalte die komplexe Zahlenebene mit $\Re(z)$ als Abzisse und $\Im(z)$ als Ordinate.
- Die zu z *konjugiert komplexe Zahl* ist definiert als $\overline{z} = x - iy$. Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$.
- Der *Betrag* $|z| := |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ ist nichts anderes als die 2-Norm des $\mathbb{R}^2$. Zudem gilt:
$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$
Es folgt sofort[28]: $|uv| = |u|\,|v| \;\forall\, u,v \in \mathbb{C}$
- Die *Polarkoordinaten* r, φ einer komplexen Zahl $z = a+bi$ mit
$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \text{ und } \cos\varphi = \frac{a}{r}$$
Zudem:
$$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \text{ und } r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$
- $\mathbb{C}$ wird als normierter Raum der Betragsfunktion $|\cdot|$ als Norm betrachtet.
- $\mathbb{C}$ ist vollständig, also auch ein Banachraum (denn $\mathbb{R}^2$ ist vollständig (21)).

[28]„Was sich herausstellt: Die Welt $\mathbb{C}$ ist eine viel schönere Welt als die Welt $\mathbb{R}$! Da herrscht viel mehr Harmonie und Ordnung!“

22.2 Differenzierbarkeit, Ableitung

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ und jedes $z \in D$ Häufungspunkt von D. Definition und Gundregeln genau wie für $\mathbb{R}$:

- $(cf)' = cf'$
- $(f + g)' = f' + g'$
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel analog
- $(z^n)' = nz^{n-1} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
- ist f differenzierbar, so ist f stetig

22.2.1 Konstante Funktion/Ableitung null

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $D = \mathbb{C}$ oder $D = \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG: Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

BEWEIS: Zu $u, v \in D$ definiere $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch:

$$g(x) = u + (v - u) \cdot x$$

Es gilt[29]: $g(0) = u$, $g(1) = v$ und $g'(x) = v - u$. Die Kettenregel liefert:

$$f(g(x))' = \underbrace{f'(g(x))}_{=0} \cdot g'(x) = 0$$

Die Funktion $f \circ g$ ist von $[0, 1]$ nach $\mathbb{C}(\simeq \mathbb{R}^2)$, konstant nach (21.6). Dann gilt:

$$f(u) = f(g(0)) = f(g(1)) = f(v)$$

ZUSATZ: Es genügt die folgende Eigenschaft von D: Für jedes $u, v \in D$ existiert eine Folge $u_0, ..., u_n$ in D mit $u_0 = u$ und $u_n = v$ mit der Eigenschaft

$$\{u_{i-1} + (u_i - u_{i-1}) \cdot x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subseteq D \; \forall \, i = 1, ..., n$$

Anschaulich: Jeder Punkt jeder Verbindungsstrecke zwischen zwei Folgegliedern u_{i-1} und u_i muß in D liegen.

[29] „Die Funktion ist differenzierbar, differenzierbarer geht's kaum!“

22.2.2 Differenzierbarkeitssatz für Funktionen in $\mathbb{C}$

VORAUSSETZUNG: Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $z \in D$; $f_n = \Sigma f_n$; $\Sigma f_n'(z)$ konvergent. Es existieren zudem $L_n \geq 0$ mit ΣL_n konvergent; gelte

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n \, |x - y| \quad \forall \, x, y \in D$$

BEHAUPTUNG: f ist differenzierbar in z mit $f'(z) = \Sigma f_n'(z)$.

BEWEIS: Genau wie für (16.8)

22.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$

- Alle Sätze über die absolute Konvergenz von reellen Potenzreihen bleiben gültig.
- Eine Potenzreihe

$$(P) \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$$

  hat einen Konvergenzradius und einen *Konvergenzkreis* $K = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| < r\}$.

- Die Potenzreihe (P) konvergiert auf K absolut, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |z - z_0|^n \ \text{ konvergiert}$$

- Erhalte insbesondere die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots \end{aligned}$$

- Offenbar gilt die *Eulersche Gleichung*:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$$

- Die Funktionen e^z, $\sin z$ und $\cos z$ sind differenzierbar mit den gewohnten Ableitungen.

22.3.1 Ableitung von Potenzreihen in $\mathbb{C}$

VORAUSSETZUNG: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und abgeschlossen. Definiere die Reihen

$$(P)\ f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } (P')\ g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

BEHAUPTUNG: Konvergiert (P') absolut für jedes $z \in D$, so konvergiert auch (P) für alle $z \in D$ absolut. Zudem ist die Funktion f differenzierbar auf D mit Ableitung g.

BEWEIS: Genau wie für (16.9), dort war $D = [a, b]$ und es wurde benötigt:

$$\exists\ u \in D \text{ mit } |x| \leq |u|\ \forall\ x \in D$$

Dies bleibt für D hier richtig wegen des Satzes von Maximum und Minimum, da $x \to |x|$ stetig ist.

Konsequenz: Im Komplexen gelten dieselben Sätze über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen wie im Reellen.

22.4 Exponential- und Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$

22.4.1 Funktionen mit konstantem Verhältnis

VORAUSSETZUNG: Seien $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ mit $D = \mathbb{R}$ oder $D = \mathbb{C}$. Seien $f' = f$ und $g' = g$.

BEHAUPTUNG: Es existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = cg(z)\ \forall\ z \in D$.

BEWEIS: Es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} = \frac{gf - fg}{g^2} = 0$$

Nach (22.2.1) ist damit $\frac{f}{g}$ konstant, also existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f = c \cdot g$.

22.4.2 Summenregel für Exponential-Funktion

BEHAUPTUNG: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \neq 0$$

BEWEIS: Für festes y existiert nach eben bewiesenem Satz ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\underbrace{e^{x+iy}}_{f(x)} = c \underbrace{e^x}_{g(x)}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Also $e^{iy} = f(0) = ce^0 = c \cdot 1 = c$. Zudem folgt mit der Eulerschen Gleichung: Es existiert kein $y \in \mathbb{R}$ mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, damit ist

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot \underbrace{(\cos y + i \cdot \sin y)}_{\neq 0} \neq 0$$

22.4.3 Hauptsatz

BEHAUPTUNG:

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v \;\forall\, u, v \in \mathbb{C}$$

BEWEIS: Wende (22.4.1) an mit $g(z) = e^z$ und $f(z) = e^{u+z}$ für ein festes u, sei jeweils $D = \mathbb{C}$. Erhalte $c \in \mathbb{C}$ mit $e^{u+v} = ce^z \;\forall\, z \in D$. Also: $e^u = ce^0 = c$, damit gilt:

$$e^{u+z} = \underbrace{e^u}_{c} \cdot e^z \;\forall\, z \in \mathbb{C}$$

22.4.4 Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

BEHAUPTUNG: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|e^z| = e^x \text{ und } \left|e^{iy}\right| = 1$$

BEWEIS: Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ ist stetig. Für jede konvergenze komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für jede Reihe gilt daher:

$$\overline{\lim_{n\to\infty} z_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{z_n} \quad \text{und} \quad \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n$$

Also folgt für die Exponentialfunktion:

$$\overline{e^{x+iy}} = \overline{e^z} = e^{\overline{z}} = e^{x-iy}$$

Damit gilt:

$$\left|e^{iy}\right|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{\overline{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy+(-iy)} = e^0 = 1$$

Weiter:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow |e^z| = |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| = 1 \cdot e^x$$

22.4.5 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

BEHAUPTUNG: Es existiert genau ein $y \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos y$ und $b = \sin y$, damit ist

$$e^{iy} = a + bi$$

BEWEIS: Folgt sofort aus $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und dem Funktionsverlauf von sin und cos.

22.4.6 Periodizität der Exponentialfunktion

SATZ: Die Abbildung $y \mapsto e^{iy}$ ist bijektivon (sic!) $[0, 2\pi)$ auf $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (der Einheitskreis)

22.4.7 Bild der Exponentialfunktion

Die Abbildung

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } exp : z \mapsto e^z$$

ist periodisch mit Periode $2\pi \cdot i$. Auf dem „Streifen“ $\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im(z) < 2\pi\}$ ist sie bijektiv, d.h. injektiv mit Bild $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

BEWEIS: Zur Periode:

$$e^{z+2\pi \cdot i} = e^z \cdot e^{2\pi \cdot i} = e^z \cdot \underbrace{(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}_{=1} = e^z$$

Zur Bijektivität: Sei $0 \neq u \in \mathbb{C}$. Schreibe $u = r \cdot v$ mit $r = |u|$, also $|v| = 1$. Dann eixsitert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $r = e^x$. Außerdem existiert nach (22.4.6) genau ein $y \in [0, 2\pi)$ mit $v = e^{iy}$. Es folgt:

$$u = r \cdot v = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

22.4.8 Logarithmusfunktion

- Als komplexe Logarithmusfunktion läßt sich nun die Umkehrfunktion $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to S$ definieren, wobei $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(z) < 2\pi\}$. Anstelle von S kann man jeden analogen „Streifen“ der Höhe 2π verwenden, zum Beispiel $S' = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im(z) < \pi\}$ etc.

- Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$a^z = e^{z \cdot \log a} \text{ mit } \log a \in \mathbb{R}$$

- Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ ist $e^{n \cdot u} = e^{u+u+\ldots+u} = (e^u)^n$, gilt auch für $n \in \mathbb{Z}$.

22.4.9 Wurzeln im Komplexen

- Da $e^u = \left(e^{\frac{u}{n}}\right)^n$ gilt, hat jede komplexe Zahl für $n \in \mathbb{N}$ eine n-te Wurzel.
- Die Zahlen
$$\varepsilon_j = e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot i}{n}} \ \forall \ j = 1, ..., n$$
sind paarweise verschiedene n-te Einheitswurzeln mit $\varepsilon_j^n = 1$. Folglich gilt die Polynomgleichung
$$x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n} (x - \varepsilon_i)$$
und analog mit $b^n = a \in \mathbb{C}$ und $a_j := \varepsilon_j \cdot b$
$$x^n - a = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$
- „Fundamentalsatz“„kein Mensch mit mathematischem Verständnis versteht das...“ der Algebra: Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle (ist also Produkt von linearen Polynomen)

23 Multiplikation und Norm

Es geht um normierte Algebren, insbesondere Banachalgebren. Seien U, V, W immer normierte Räume, die Norm wird im Folgenden z.T. mit $|\cdot|$ statt mit $\|\cdot\|$ bezeichnet.

23.1 Definitionen

- Definition: Nenne eine bilineare Abbildung $U \times V \to W$ mit $(u, v) \mapsto uv$ *normverträglich* genau dann, wenn
$$\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \ \forall \ u \in U, v \in V$$
Beispiel: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Allgemeiner: $U = V$ sind $\mathbb{R}$-Räume mit positiv definitem Skalarprodukt.
- Beispiele für normverträgliche bilineare Abbildungen: Sein $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge der stetigen linearen Abbildungen.
  1. $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \times V \to W$ mit $\varphi : (\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$

2. $\varphi : \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(U,V) \to \mathcal{L}(U,W)$ mit $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$

   Zu zeigen: $|\alpha \circ \beta| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$, für alle $x \in U$ gilt:

$$|(\alpha \circ \beta)x| = |\alpha(\beta(x)| \leq |\alpha| \cdot |\beta(x)| \leq |\alpha|\,|\beta|\,|x|$$

- DEFINITION: Eine normierte Algebra ist ein normierter Raum A zusammen mit einer normverträglichen bilinearen Multiplikation $A \times A \to A$.

- DEFINITION: A heißt Banachalgebra, falls A als normierter Raum vollständig ist, d.h. ein Banachraum.

  BEISPIEL:

  1. Raum der beschränkten Funktionen: $A := \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ mit D beliebige Menge, sei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm. Beweis der Normverträglichkeit:

$$|f(x)| \leq \|f\| \ \forall\, x \in D \text{ und } |g(x)| \leq \|g\| \ \forall\, x \in D$$

$$\Rightarrow |(fg)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$\Rightarrow \|fg\| = \sup\{\,|(fg)(x)| \mid x \in D\} \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

     Damit ist A eine Banachalgebra nach (21.2).

  2. Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $A := \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ ist eine Teilalgebra von $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ und ebenfalls eine Banachalgebra.

- Hauptanwendungen der Regel $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ zum Beispiel:

  1. Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit den Limites u und v, dann folgt: $\lim u_n v_n = uv$
  2. analog für Funktionen
  3. Produktregel: Seien $f : D \to U$ und $g : D \to V$, beide differenzierbar, dann ist $fg : D \to W$ differenzierbar mit $(fg)' = f'g + fg'$

23.2 Stetigkeit einer linearen Abbildung

VORAUSSETZUNG: $\alpha : V \to W$ linear[30].

BEHAUPTUNG: Äquivalent sind:

[30] „Es ist manchmal im Leben und auch in der Mathematik besser, man weiß gar nicht so viel!“

(a) α ist stetig in 0

(b) Es existiert $c > 0$ mit $\|\alpha(x)\| \leq c \cdot |x| \;\forall\, x \in V$

(c) α ist Lipschitz-stetig

BEWEIS:

(a) $\Rightarrow$ (b) Es existiert $\delta > 0$ für $\varepsilon = 1$ mit $\|\alpha(x) - \alpha(0)\| \leq 1 \,\forall\, x \in V$ mit $|x| \leq \delta$. Dann folgt für alle $0 \neq x \in V$:

$$\|\alpha(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} \cdot \left\| \alpha\left(\delta \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta} \cdot 1$$

Damit gilt die Bedingung mit $c = \frac{1}{\delta}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|\alpha(x - y)\| \leq c\,\|x - y\|$$

(c) $\Rightarrow$ (a) trivial

23.2.1 endlichdimensionale lineare Abbildungen

VORAUSSETZUNG: Sei V endlichdimensional.

BEHAUPTUNG: α ist Lipschitz-stetig.

BEWEIS: Darf $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und $\|\cdot\|$ als ∞-Norm annehmen. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Setze

$$c = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(e_i)\|$$

Dann läßt sich (23.2) anwenden: Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\alpha(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha(e_i) \right\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| \, \|\alpha(e_i)\|) \\
&\leq \max\{\, \|x_i\| \mid i = 1, ..., n\} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\|\alpha(e_i)\|) \\
&\leq \|x\| \cdot c
\end{aligned}$$

23.2.2 Beispiel für nicht-stetige Abbildung

Seien V, W die folgenden normierte Räume bezüglich der Supremumsnorm:

$$V = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ und } W = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

Betrachte die folgende Abbildung:

$$\alpha : V \to W \text{ mit } \alpha : f \mapsto f'$$

Annahme: α ist stetig. Dann existiert $c > 0$ mit $|\alpha(f)| \leq c \cdot |f| \;\; \forall\, v \in V$. Betrachte die Funktionenfolge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_n(x) = x^n \in V \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist $|f_n| = 1$, aber damit ist

$$\|\alpha(f_n)\| = \|f_n'\| = n \cdot \left\|x^{n-1}\right\| = n \leq c\,\|f_n\| = c \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch, damit ist α nicht stetig.

23.2.3 Algebra der stetigen Endomorphismen

Sei V ein normierter Raum. Dann ist $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ bezüglich der Operatornorm in (23.3) eine normierte Algebra, bei endlichdimensionalem V sogar eine Banachalgebra. Es gilt: $|id_V| = 1$

23.3 Die Operatornorm

Voraussetzung: Sei $\mathcal{L}(V,W)$ der $\mathbb{R}$-Raum der stetigen linearen Abbildungen $\alpha : V \to W$. Behauptung: Die sog. Operatornorm ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V,W)$:

$$\begin{aligned}
\|\alpha\| &:= \inf\{\, c \geq 0 \mid \|\alpha(x)\| \leq c\,\|x\| \;\; \forall\, x \in V\} \\
&= \sup\left\{ \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \in V \setminus \{0\} \right\} \\
&= \sup\{\, \|\alpha(y)\| \mid y \in V \setminus \{0\} \text{ mit } |y| \leq 1\}
\end{aligned}$$

Beweis:

1. $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow |\alpha(x)| = 0 \;\forall\, x \in V \Rightarrow \alpha = 0$
2. $\|k\alpha\| = k\,\|a\| \;\; \forall\, k \in \mathbb{R}$

3. Gilt $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$? Es ist $|\alpha(x)| \le \|\alpha\| \cdot |x| \;\; \forall\, x \in V$, damit folgt:

$$\begin{aligned} |(\alpha+\beta)(x)| &= |\alpha(x)+\beta(x)| \\ &\le |\alpha(x)| + |\beta(x)| \\ &\le \|\alpha\|\,|x| + \|\beta\|\,|x| \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)\,|x| \end{aligned}$$

23.3.1 Operatornorm des Matrizenraumes

Vorbemerkung: Sei $\mathbb{R}_{m,n}$ der Raum der $m \times n$-Matrizen (in LinAlg: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$). Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gehöre zu $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die $m \times n$-Matrix A.

Achtung: In der Analysis sind im Vergleich zur Linearen Algebra die Rolle der Zeilen und Spalten vertauscht, da die Abbildung von links und nicht von rechts geschrieben wird. Daher auch $m \times n$-Matrizen und nicht $n \times m$. !

Für $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\alpha v = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r \in \mathbb{R}^m$$

Erhalte zu gegebenen Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Operatornorm auf $\mathbb{R}_{m,n}$ so:

$$\|A\| = \inf\{\, c \ge 0 \mid \ \|A \cdot v\| \le c \cdot \|v\| \ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n\}$$

Damit hängt die Operatornorm von den Normen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ab, z.B. bei ∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$: Erhalte die *Zeilensummennorm* auf $\mathbb{R}_{m,n}$:

$$\|(a_{ij})_{m\times n}\| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; i = 1, ..., m \right\}$$

23.4 Potenzreihen in einer Banachalgebra

Sei A eine Banachalgebra, z.B. $\mathbb{R}_n$. Betrachte eine Potenzreihe

$$(P)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ mit } a_n \in A$$

Definition:

- Konvergenzradius[31] := Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum |a_n| x^n$
- Konvergenzkreis $K := \{x \in A \mid |x| < r\}$

Dann konvergiert (P) absolut für jedes $x \in K$ (da $|a_n x^n| \leq |a_n| |x|^n \leq |a_n| s^n$ für jedes s mit $|x| \leq s < r$).

23.4.1 Hauptbeispiele

1. Die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ konvergiert absolut für alle $x \in A$ mit $|x| < 1$, falls A ein Einselement mit Norm 1 hat.

   Weiter: $(1 + x + x^2 + ...)(1 - x) = 1$, insbesondere ist $1 - x$ in A invertierbar.

2. Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvertiert„die Reihe konvergiert ja für jedes Dingsbums“ für jedes $x \in A$ absolut, bezeichnet die Summe mit e^x. Regel:

   $$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \;\forall\; x, y \in A \text{ mit } xy = yx$$

   Insbesondere ist $e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

3.

23.5 Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum u_n$ und $\sum v_n$ zwei Reihen (etwa in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder einer Banachalgebra). Das Cauchyprodukt der Reihen ist $\sum w_n$ mit

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$$

23.5.1 absolute Konvergenz

Seien $\sum u_n$ und $\sum v_n$ zwei absolut konvergente Reihen mit den Summen u und v, dann ist das Cauchyprodukt $\sum w$ absolut konvergent mit der Summe uv. Für Potenzreihen heißt das:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^x n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

[31] „... Potenzradius ...“

23.5.2 Anwendung

Satz: Sei A eine Banachalgebra mit Einselement 1 und $|1| = 1$. Seien $x, y \in A$ mit $xy = yx$. Dann ist

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Beweis: Es ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n} \text{ und } e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^n}{n!}}_{v_n} \text{ sowie } e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(x+y)^n}{n!}}_{w_n}$$

Zu zeigen: $w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}$ Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^n}{n!} &= \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \right) x^i y^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{x!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}
\end{aligned}$$

Naiv: $(\sum u_n)(\sum v_n) = \underbrace{\sum_{i,j} u_i v_j}_{\text{sinnlos}}$, siehe Ergänzungsvorlesung

24 Partielle und totale Differenzierbarkeit

24.1 Offene Mengen

Voraussetzung: Sei M ein metrischer Raum und $X \subseteq M$.

Definition: X ist *offen* (im M) genau dann, wenn für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung $U(x)$ um, so daß $U \subseteq X$, d.h. x ist ein innerer Punkt. Damit ist X eine Umbegung von x.

Beispiele:

1. Intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$
2. ε-Umgebungen in metrischem Raum M

Regeln:

1. Jede Vereinigung von offenen Mengen $\subseteq M$ ist offen.
2. Jeder Schnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
3. X ist offen genau dann, wenn $M \setminus X$ abgeschlossen ist.
4. Für $X_0 \subseteq M_0 \subseteq M$ gilt: X_0 ist offen in M_0 genau dann, wenn ein X existiert, das offen in M ist und für das gilt: $X_0 = M_0 \cap X$.
5. $f : M \to N$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $Y \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(Y)$ ist offene Menge in M.

Beweis:

5. f ist stetig in a genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(a)$ eine Umgebung V von a existiert mit $f(V) \subseteq U$, d.h. $V \subseteq f^{-1}(U)$.

24.2 Partielle Ableitungen

Beispiel und Mutivation (sic!): betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } (x, y) \mapsto x^2 \cdot y^2$$

und für festes $y \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto x^2 \cdot y^2$$

Dann ist $g'(x) = 2xy^2$. Dies ist beim Differenzieren „nach x“ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f : (x, y) \mapsto 2xy^2$$

Sei $u = (x, y)$. Dann ist

$$g'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + te_1) - f(u)}{t} \text{ mit } e_1 = (1, 0)$$

Definiere nun zu $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\{e_1, y..., e_n\}$ die Standardbasis) die *partiellen Ableitungen* $D_1 f, D_2 f, ..., D_n f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$D_i f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + te_i) - f(u)}{t}$$

Die Funktion f ist *partiell differenzierbar* genau dann, wenn $D_i f(u)$ existiert für alle i und $u \in \Omega$. Die Funktion f ist *stetig partiell differenzierbar* genau dann, wenn f partiell differenzierbar ist und $D_i f$ stetig ist für

$i = 1, ..., n$. Der *Gradient* von f ist das Tupel $(D_1 f, D_2 f, ..., D_n f)$, im Punkt u: $(D_1 f(u), ..., D_n f(u))$. BEISPIEL:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x + x^2 y + \sin xy \\ \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(x,y) &= 1 + 2xy + y \cdot \cos xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(x,y) &= x^2 + x \cdot \cos xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{12} f(x,y) &= 0 + 2x + xy \cdot (-\sin xy) + \cos xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{21} f(x,y) &= 2x + xy \cdot (-\sin xy) + \cos xy \end{aligned}$$

24.2.1 Richtungsableitung

Sei $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *Richtungsableitung*

$$D_e f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + te) - f(u)}{t}$$

24.3 Allgemeine Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Seien V, W normierte Räume und $\Omega \subseteq V$ offen. Sei $a \in \Omega$ und $f : \Omega \to W$.

BEHAUPTUNG: Es gibt höchstens eine $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha(h)}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

DEFINITION: Nenne f differenzierbar in a genau dann, wenn $\alpha : V \to W$ existiert. Schreibe

$$f'(a) = \alpha \text{ und } Df(a) = \alpha$$

Erhalte, wenn das für alle $a \in \Omega$ gilt, die *Ableitung* $f' : \Omega \to \mathcal{L}(V, W)$ (also Df). Umformulierungen[32] von $(*)$:

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + |h| \cdot \psi(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \psi(h) = 0 \qquad (**)$$

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + |h| \cdot \psi(h) \text{ mit } \psi(0) = 0 \text{ und } \psi \text{ stetig in } 0 \qquad (***)$$

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + \omega(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot \omega(h) = 0 \qquad (****)$$

[32] „Sternchen haben wir ja genug!“

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + o(h)^{33} \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot o(h) = 0 \qquad (*****)$$

Triviale Regeln:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(kf)' = k(f')$
3. f differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig

Beweis für die Eindeutigkeit von α: Sei $\beta \in \mathcal{L}(V, W)$ wie α, und setze $\gamma = \alpha - \beta \in \mathcal{L}(V, W)$. Erhalte aus $(*)$::

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h) - \beta(h)}{|h|} = 0 \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(h)}{|h|}$$

Für jedes $0 \neq v \in V$ folgt, wenn für $t \in \mathbb{R}$ gilt, daß $\lim_{t \to 0} tv = 0$:

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{\gamma(tv)}{|tv|} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \left| \frac{\gamma(v)}{|v|} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{\gamma(v)}{|v|} \right| = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Damit ist $\gamma = 0 = \alpha - \beta$, also $\alpha = \beta$.

24.4 Ableitungsregeln

24.4.1 Die Produktregel

Seien V, W, W_1, W_2 normierte Räume und $\Omega \subseteq V$ offen. Benutze eine bilineare, bistetige[34] Multiplikation $W_1 \times W_2 \to W$ mit $(x, y) \mapsto xy$. Betrachte zwei differenzierbare Funktionen $f : \Omega \to W_1$ und $g : \Omega \to W_2$.

Behauptung:

$$fg : \Omega \to W \text{differenzierbar mit } (fg)' = fg' + f'g$$

Beweis: Sei $a \in \Omega$, $f'(a) = \alpha$ und $g'(a) = \beta$. Die folgende Abbildung γ ist linear und stetig:

$$\gamma : V \to W \text{ mit } \gamma(h) = f(a)\beta(h) + \alpha(h)g(a)$$

[33] „klein $o(h)$", wobei Regeln gelten wie $o(h) + o(h) = o(h)$ und $g(h) \cdot o(h) = o(h)$ für beschränkte g.

[34] allgemeiner als „normverträglich"

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \alpha(h) + o(h) \\
g(a+h) &= g(a) + \beta(h) + o(h) \\
(fg)(a+h) &= (f(a) + \alpha(h) + o(h)) \cdot (g(a) + \beta(h) + o(h)) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + \underbrace{o(h) \cdot g(a) + o(h) \cdot \beta(h) + o(h) \cdot o(h) + f(a) \cdot o(h) + \alpha(h) \cdot o(h)}_{=o(h)} + \alpha(h) \cdot \beta(h) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + o(h) + \alpha(h) \cdot \beta(h) \\
&= f(a) \cdot g(a) + \gamma(h) + o(h)
\end{aligned}
$$

Die letzte Umformung gilt, da $\alpha(h) \cdot \beta(h) = o(h)$, denn $\frac{\alpha(h)}{|h|} \cdot \beta(h) \to 0$.[35]

24.4.2 Die Kettenregel

Seien V, V, W normierte Räume. Sei $\Omega_U \subseteq U$ offen, sei $\Omega_V \subseteq V$ offen. Sei $g : \Omega_U \to \Omega_V$, sei $f : \Omega_V \to W$. Sei $a \in \Omega_U$ mit $b := g(a) \in \Omega_V$. Seien

$$g'(a) = \beta \in \mathcal{L}(U, V) \text{ und } f'(b) = \alpha \in \mathcal{L}(V, W)$$

Behauptung: $f \circ g : \Omega_U \to W$ ist differenzierbar mit

$$(f \circ g)' = \alpha \circ \beta \text{ und } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a)$$

Beweis: Mit $q(h) = g(a+h) - g(a) = \beta(h) + o(h)$ gilt mit $\lim_{x \to 0} \psi(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(b + q(h)) - f(b) \\
&= \alpha(q(h)) + |q(h)| \, \psi(q(h)) \\
&= \alpha(\beta(h)) + \alpha(o(h)) + |q(h)| \, \psi(q(h))
\end{aligned}
$$

Es bleibt zu zeigen: $\alpha(o(h))$ „$=$“ $o(h)$ und $|q(h)| \, \psi(q(h))$ „$=$“ $o(h)$. Betrachte Grenzwerte für $h \to 0$:

$$\frac{\alpha(o(h))}{|h|} = \alpha\left(\frac{o(h)}{|h|}\right) \to \alpha(0) = 0 \text{ und } \underbrace{\frac{|q(h)|}{|h|}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\psi(q(h))}_{\to 0} \to 0$$

wobei die Beschränktheit folgt aus $\frac{|q(h)|}{|h|} = \frac{|\beta(h) + o(h)|}{|h|}$.

24.5 Ableitung in allen Komponenten

Voraussetzung: Seien $V, W = \mathbb{R}^m$ normierte Räume, $\Omega \subseteq V$ offen, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to W$, $f_1, ..., f_m$ die Koordinatenfunktionen.

Behauptung:

[35] Annika hat'n Virus! :o)

1. f ist differenzierbar in a genau dann, wenn f_i differenzierbar ist in a für $i = 1, ..., m$

2. Ist $\alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(V, W)$ und sind $\alpha_1, ..., \alpha_m$ die Koordinatenfunktionen von α, so ist $\alpha_i = f_i'$

BEWEIS: Für $\alpha : V \to W$ mit Koordinatenfunktionen $\alpha_1, ..., \alpha_m$ und $\omega : U \to W$ mit Koordinatenfunktionen $\omega_1, ..., \omega_m$ (wobei $U = U(0) \subseteq V$) gilt:

1. $f(a+h) - f(a) = \alpha(a) + \omega(h) \ \forall \ h \in U \Leftrightarrow f_i(a+h) - f_i(a) = \alpha_i(a) + \omega_i(h) \ \forall \ h \in U, i = 1, ..., m$

2. α ist linear und stetig genau dann, wenn $\alpha_1, ..., \alpha_m$ linear und stetig sind nach (21.3.1).

3. $\lim_{h\to 0} \frac{\omega h}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\omega_i h}{\|h\|} = 0 \ \forall \ i = 1, ..., m$

Beide Behauptungen sind damit erledigt.

24.6 allgemeine $\Rightarrow$ partielle Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Sei V normierter Raum, $\Omega \subseteq V$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $a \in \Omega$ und $\alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

BEHAUPTUNG: Für jedes $e \in V \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $D_e f : \Omega \to \mathbb{R}$ und es ist $D_e f(a) = \alpha e$.

Insbesondere existieren im Fall $V = \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen $D_1 f, ..., D_n f$ mit $D_i f(a) = \alpha e_i$, wobei $e_1, ..., e_n$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

BEWEIS: Wegen $\lim_{t\to 0} te = 0$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{\|h\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a) - \alpha(te)}{\|te\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a) - t \cdot \alpha e}{t} \\ \Rightarrow \alpha e = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot \alpha e}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} = D_e f(a) \end{aligned}$$

24.7 Jacobi-Matrix

VORAUSSETZUNG: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in \Omega$ mit den Koordinatenfunktionen $f_i, ..., f_m$. Sei

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ Matrix von } \alpha = f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

BEHAUPTUNG:

$$a_{ij} = D_j f_i(a)$$

Das heißt, die i-teZeile von A ist der Gradient der i-ten Koordinatenfunktion von f.

DEFINITION: Die Matrix $A = (a_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = D_j f_i(a)$ heißt *Jacobi-Matrix*, auch *Funktionalmatrix* von f an der Stelle a.

BEWEIS: Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Nach (24.5) ist $f_i' = \alpha_i$, nach (24.6) ist $D_j f_i(a) = \alpha_i e_j = a_{ij}$.

24.8 Partielle $\Rightarrow$ totale Differenzierbarkeit

VORAUSSETZUNG: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.

BEHAUPTUNG: f ist differenzierbar.

BEWEIS: Nur für $n = 2$, Rest analog. Die Norm auf $\mathbb{R}^n$ darf beliebig gewählt werden. Wähle sie so, daß

$$\|(x, y)\| \geq |x|\,|y| \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sei nun $a = (a_1, a_2)$ und U eine ε-Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$ mit $a+h \in \Omega \;\forall\, h \in U$. Schreibe für $h = (h_1, h_2) \in U$:

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)}_{:=S} + \underbrace{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}_{:=T}$$

Es existiert $c_1 = c_1(h) \in \mathbb{R}$ zwischen a_1 und $a_1 + h_1$ mit

$$S = D_1 f(c_1, a_2 + h_2) \cdot h_1 \tag{2}$$

Beweis zu (2):

Darf $h_1 \neq 0$ annehmen. Setze

$$I := \begin{cases} [a_1, a_1 + h_1] & \text{falls} \quad h_1 > 0 \\ [a_1 + h_1, a_1] & \text{falls} \quad h_1 < 0 \end{cases}$$

Für alle $x \in I$ ist $(x, a_2 + h_2) \in \Omega$. Die Funktion

$$g : I \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x, a_2 + h_2)$$

ist differenzierbar mit $g'(x) = D_1 f(x, a_2 + h_2)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung existiert $c_1 \in I$ mit $g(a_1+h_1) - g(a_1) = g'(c_1) \cdot h_1$

Es existiert $c_2 = c_2(h) \in \mathbb{R}$ zwischen a_2 und $a_2 + h_2$ mit

$$T = D_2 f(a_1, c_2) \cdot h_2 \tag{3}$$

Beweis analog zu (2).

Definiere Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : U \to \mathbb{R}$ durch

$$D_1 f(c_1(h), a_2 + h_2) = D_1 f(a) + \varphi_1(h) \text{ und } D_2 f(a_1, c_2(h)) = D_2 f(a) + \varphi_2(h)$$

Die Funktionen φ_1, φ_2 sind stetig in 0. Wir haben $\lim_{h \to 0}(c_1(h), a_2 + h_2) = (a_1, a_2) = a$.

Da nach Voraussetzung $D_1 f$ stetig ist (also auch stetig in a), folgt $\lim_{h \to 0} D_1 f(c_1(h), a_2 + h_2) = D_1 f(a)$. Also ist

$$\lim_{h \to 0} \varphi_1(h) = 0 = \varphi_1(0)$$

Damit ist φ_1 stetig in 0. Wir haben:

$$f(a+h) - f(a) = T + S = \underbrace{D_1 f(a) h_1 + D_1 f(a) h_2}_{:= \alpha(h)} + \underbrace{\varphi_1(h) h_1 + \varphi_2(h) h_2}_{:= \omega(h)}$$

Erhalte lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Für $\omega : U \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h_1}{|h|} \varphi_1(h) + \frac{h_2}{|h|} \varphi_2(h) \right) = 0$$

wegen $\lim_{h \to 0} \varphi_i(h) = 0$ und $\left| \frac{h_i}{h} \right| \leq$. (?!)

24.9 Satz von Schwarz

Voraussetzung: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, d.h. die partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f, D_{12} f, D_{21} f$ existieren und sind stetig.

Behauptung:

$$D_{12} f = D_{21} f$$

Bemerkung: Die Existenz von $D_{21} f$ braucht nicht vorausgesetzt zu werden.

BEWEIS: Wähle die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. Sei U eine ε-Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^2$ mit $a + U \subseteq \Omega$. Sei $h = (h_1, h_2) \in U \setminus \{0\}$. Setze

$$\begin{aligned} T = T(h) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)) \\ &= g(a_1 + h_1) - g(a_1) \text{ mit } g(x) := f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2) \end{aligned}$$

Die Funktion g ist definiert für alle $x \in (a_1, a_1 + h)$. Mit Mittelwertsatz existiert $c_1 = c_1(h) \in (a_1, a_1 + h_1)$ mit

$$T = \underbrace{(D_1 f(c_1, a_2 + h_2) - D_1 f(c_1, a_2))}_{=:s} h_1$$

Analoge Anwendung des Mittelwertsatzes: Es existiert $c_2 = c_2(h) \in (a_2, a_2 + h_2)$ mit $S = D_2 D_1 f(c_1, c_2) h_2$. Also:

$$T = D_2 D_1 \underbrace{f(c_1, c_2)}_{f(c(h))} h_2 h_1 \text{ mit } \lim_{h \to 0} c(h) = (a_1, a_2)$$

Analog ist

$$T = D_1 D_2 f(d(h)) h_2 h_1 \text{ mit } \lim_{h \to 0} d(h) = (a_1, a_2)$$

Erhalte $D_2 D_1 (f(c(h))) = D_1 D_2 f(d(h)) =: F(h)$ wegen

$$D_2 D_1 f(a) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{h \to 0} F(h) \overset{\text{stetig}}{=} D_1 D_2 f(a)$$

24.10 allgemeiner Satz von Schwarz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar.

BEHAUPTUNG: Eine k-te partielle Ableitung $D_{j_1} D_{j_2} ... D_{j_k} f$ ist von der Reihenfolge der Indizes j_i unabhängig.

BEWEIS: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \geq 2$. Betrachte

$$D_{j_1} ... D_{j_s} D_{j_{s+1}} ... D_{j_k} f$$

Nach (24.9) dürfen D_{j_s} und $D_{j_{s+1}}$ vertauscht werden.

25 Zusammenhang

Frage: Welche Teilmengen eines normierten Raumes spielen die Rolle der Intervalle in $\mathbb{R}$?

25.1 Definition

VORAUSSETZUNG: Sei M metrischer Raum.

DEFINITION: Folgendes ist äquivalent:

- M zusammenhängend
- Die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M sind $\emptyset$ und M.
- $M = \underset{\text{offen}}{X} \uplus \underset{\text{offen}}{Y} \Rightarrow X = \emptyset \vee Y = \emptyset$

Eine Teilmenge T von M ist (als metrischer Raum) zusammenhängend genau dann, wenn

$$T = (\underset{\text{offen}}{X} \cap T) \uplus (\underset{\text{offen}}{Y} \cap T) \Rightarrow (X \cap T) = \emptyset \vee (Y \cap T) = \emptyset$$

25.2 Zusammenhänge in $\mathbb{R}$

VORAUSSETZUNG: Sei $T \subseteq \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG: T ist zusammenhängend genau dann, wenn T intervall ist.

BEWEIS:

„$\Rightarrow$“ Angenommen, T sei kein Intervall. Dann existieren $x, y \in T$ und $a \notin T$ mit $x < a < y$. Setze $X = (-\infty, a) = \mathbb{R}_{<a}$ und $Y = (a, +\infty) = \mathbb{R}_{>a}$. X und Y sind offen in $\mathbb{R}$,

$$T \subseteq X \uplus Y \text{ mit } T = (T \cap X) \uplus (T \cap Y)$$

Damit ist T nich zusammenhängend, Widerspruch!

„$\Leftarrow$“ Angenommen, T sei nicht zusammenhängend. Dann existieren $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $T = \underbrace{(X \cap T)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap T)}_{\neq 0}$. Wähle $x \in X \cap T$ und $y \in Y \cap T$. O.B.d.A. ist $x < y$, setze $s = \sup X$. Es folgt: $x \leq s \leq y$, daher $s \in T$. Also ist $x \in X$ oder $s \in Y$.

Es existiert eine Umgebung von s in $\mathbb{R}$ mit $U \subseteq X$ oder $U \subseteq Y$, Widerspruch zur Wahl von s!

BEHAUPTUNG: $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend, d.h. die Zusammenhangskomponenten sind 1-Elementig.

BEWEIS: Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$; $x, y \in A$, $x < y$. Dann existiert $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$. Setze $X = \mathbb{R}_{<r}$ und $Y = \mathbb{R}_{>r}$ (beide offen). Es gilt:

$$A = \underbrace{(A \cap X)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(A \cap Y)}_{\neq 0}$$

Damit ist A nicht zusammenhängend.

25.3 allgemeiner Zwischenwersatz

VORAUSSETZUNG: Seien M, N metrische Räume. Sei $f : M \to N$ stetig.

BEHAUPTUNG:

1. $f(M)$ ist zusammenhängend.
2. $N = \mathbb{R} \Rightarrow f(M)$ ist ein Intervall

BEWEIS: Annahme, $f(M)$ sei nicht zusammenhängend. Dann existieren $X_{\text{offen}}, Y_{\text{offen}} \subseteq f(M)$ mit $f(M) = X \uplus Y$. Es folgt: $M = f^{-1}(X) \uplus f^{-1}(Y)$. Nach (24.1) ist $f^{-1}(X)$ offen in M, $f^{-1}(Y)$ ebenfalls, also ist M nicht zusammenhängend, Widerspruch!

25.4 Vereinigung von Zusammenhängen

VORAUSSETZUNG: Seien $S, T \subseteq M$ zusammenhängende Teilmengen mit $S \cap T \neq 0$.

BEHAUPTUNG: $S \cup T$ ist zusammenhängend.

BEWEIS: Annahme, $S \cup T$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren $X_{\text{offen}}, Y_{\text{offen}} \subseteq M$ mit

$$S \cup T = \underbrace{(X \cap (S \cup T))}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap (S \cup T))}_{\neq 0} \qquad (*)$$

Also ist $S = (X \cap S) \uplus (Y \cap S)$ und $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$. Da S und T zusammenhängend, ist

$$((X \cap S) = \emptyset \vee (Y \cap S) = \emptyset) \ \wedge \ ((X \cap T) = \emptyset \vee (Y \cap T) = \emptyset)$$

Da die Vereinigung von S und T nicht leer ist, folgt

$$((X \cap S) = \emptyset \wedge (X \cap T) = \emptyset) \ \vee \ ((Y \cap S) = \emptyset \wedge (Y \cap T) = \emptyset)$$

Damit folgt

$$(X \cap (S \cup T) = \emptyset) \ \vee \ (Y \cap (S \cup T) = \emptyset)$$

Widerspruch zu ($*$).

25.5 Zusammenhang des Abschlusses

Satz:

$$\underset{\text{zsh}}{T} \subseteq M \Rightarrow \underset{\text{zsh}}{\overline{T}}$$

Beweis: Annahme: $\overline{T}$ nicht zusammenhängend. Dann existieren $X, Y \subseteq M$ offen mit $\overline{T} = (X \cap \overline{T}) \uplus (Y \cap \overline{T})$. Wähle $x \in (X \cap \overline{T})$, $y \in (Y \cap \overline{T})$. Dann existieren Umgebungen U_x von x, U_y von y mit $U_x \subseteq X$, $U_y \subseteq Y$. Wegen $x, y \in \overline{T}$ ist $X \cap T \supseteq U_x \cap T \neq \emptyset$ und $Y \cap T \supseteq U_y \cap T \neq \emptyset$. Dann ist $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$, damit ist T nicht zusammenhängend, Widerspruch!

25.6 Zusammenhangskomponenten

Behauptung:

1. Die folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation:

$$a \sim b :\Leftrightarrow \exists \underset{\text{zsh}}{T} \subseteq M \text{ mit } a, b \in T$$

   Die Äquivalenzklassen heißen *Zusammenhangskomponenten*.

2. Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und abgeschlossen.

3. Ist K eine Zusammenhangskomponente und $T_{\text{zsh}} \subseteq M$ mit $T \cap K \neq 0$, so ist $T \subset K$.

Beweis:

1. Eigenschaften der Äquivalenzrelation:

   - Reflexiv: $a \sim a$, da $\{a\}$ schon zusammenhängend ist.
   - Symmetrie: trivial
   - Transitivität: Seien $a, b \in T_{\text{zsh}}$ und $b, c \in T_{\text{zsh}}$. Dann ist nach (25.4) $S \cap T$ zusammenhängend.

2. Sei K eine Zusammenhangskomponente. Annahme, K ist nicht zusammenhängend. Dann existieren

$$\underset{\text{offen}}{X}, \underset{\text{offen}}{Y} \subseteq M \text{ mit } K = \underbrace{(X \cap K)}_{\neq 0} \uplus \underbrace{(Y \cap K)}_{\neq 0}$$

   Wähle also $x \in (X \cap K)$ und $y \in (Y \cap K)$. Dann ist $x \sim y$, daher existiert $T_{\text{zsh}} \subseteq M$ mit $x, y \in T$. Damit ist $x \sim t \;\forall\, t \in T$, also $T \subseteq K$.

Also ist $T = (X \cap T) \uplus (Y \cap T)$ mit $x \in X \cap T \neq \emptyset$ und $y \in Y \cap T \neq \emptyset$, damit ist T nicht zusammenhängend.

Nach (25.5) ist $\overline{K}$ zusammenhängend, wegen (3) ist $\overline{K} \subseteq K$, also $K = \overline{K}$.

3. Siehe (2).

25.7 Wegzusammenhang

Die folgenden Eigenschaften von $u, v \in M$ sind äquivalent:

(a) Es existieren $u_0, ..., u_n \in M$ mit $u_0 = u$ und $u_n = v$ und Intervalle $D_1, ..., D_n$ von $\mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f_i : D_i \to M$ mit $u_i, u_{i-1} \in f_i(D_i)$.

(b) Es gibt reele Zahlen $a < b$ und $f : [a, b] \to M$ stetig mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$.

(c) Es gibt eine Funktion $f : [0, 1] \to M$ mit $f(0) = u$ und $f(b) = v$.

Gilt eine dieser Bedingungen für alle $u, v \in M$, so ist M *wegzusammenhängend*.

Beweis:

- Zusammenhang: Betrachte die Situation in (25.7). Nach (25.2) ist jedes D_i zusammenhängend. Nach (25.3) ist jedes $f(D_i)$ zusammenhängend. Nach (25.6)(3.) liegen u_i, u_{i-1} in derselben Zusammenhangskomponente von M.

  Also: u, v liegen in derselben Zusammenhangskomponente, damit liegen alle Elemente von M in derselben Zusammenhangskomponente, d.h. es existiert nur eine Zusammenhangskomponente und M ist zusammenhängend.

- Hilfssatz 1: Zu Intervallen $[a, b]$ und $[c, d]$ exsitieren $f, g : [a, b] \to [c, d]$ bijekktiv, stetig mit $f(a) = c$, $f(b) = d$, $g(a) = d$, $g(b) = c$. Die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} sind ebenfalls stetig.

- Hilfssatz 2: Sei $a \leq b \leq$, $f : [a, b] \to M$ stetig; $g : [b, c] \to M$ stetig; $f(b) = g(b)$. Dann ist auch die folgende Funktion stetig:

$$h : [a, c] \to M \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \leq b \\ g(x) & \text{falls} \quad x \geq b \end{cases}$$

- Die Richtung (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) folgt aus den Hilfssätzen, die Richtung (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial, da jeweils Verallgemeinerung.

25.8 Streckenzusammenhang

VORAUSSETZUNG: V normierter Raum, $M \subseteq V$ metrischer Raum

DEFINITION: Für $u, v \in V$ definiere $[u, v] := \{u + t(v - u) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ als „Verbindungsstrecke“.

DEFINITION: M ist *streckenzusammenhängend* genau dann, wenn für alle $u, v \in M$ Elemente $u_0, ..., u_n \in M$ existieren und $[u_{i-1}, u_i] \subseteq M$ für $i = 1, ..., n$.

BEISPIEL: Sei $U := U_\varepsilon(u) = \{v \in V \mid |v - u| < \varepsilon\}$. Sei $v \in U$, es genügt zu zeigen: $[u - v] \subseteq U$. Es ist

$$|u + t(v - u) - u| = \underbrace{|t|}_{\leq 1} \underbrace{|v - u|}_{<\varepsilon} < \varepsilon$$

25.9 offen, zsh. $\Rightarrow$ streckenzsh.

VORAUSSETZUNG: V normierter Raum, $\Omega \subseteq V$ offen und zusammenhängend (kurz: Ω ist ein *Gebiet*).

BEHAUPTUNG: Ω ist auch streckenzusammenhängend.

BEWEIS: Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω durch: $u \sim v$ genau dann, wenn $u = u_0, u_1, ..., u_n = v$ existieren mit $[u_{i-1}, u_i] \subseteq \Omega$.

- Reflexivität: trivial
- Symmetrie: folgt aus $[u, v] = [v, u]$, da $u + t(v - u) = v + (1 - t)(u - v)$.
- Transitivität: trivial, „hänge“ die Folgen hintereinander

Zu zeigen: Es existiert nur eine Äquivalenzklasse. Sei A eine Äquivalenzklasse, also $A \subseteq \Omega$. Zu zeigen: A ist offen. Sei $a \in A$. Wegen $A \subseteq \Omega_{\text{offen}}$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$. Wie in (25.8) gezeigt, ist die ε-Umgebung streckenzusammenhängend. Also ist $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Zudem ist $\Omega_{\text{zsh}} = A \uplus (\Omega \setminus A)_{\text{offen}}$. Also: $\Omega \setminus A$ ist leer.

25.10 Konstante Funktion/Ableitung null

VORAUSSETZUNG: V offener Raum, Ω Gebiet in V. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $f' = 0$.

BEHAUPTUNG: f ist konstant.

BEWEIS: Ω ist streckenzusammenhängend nach (25.9). Seien $u, v \in \Omega$ mit

$[u, v] \subseteq \Omega$. Es genügt zu zeigen: $f(u) = f(v)$. Seien $f_1, ..., f_m$ Koordinatenfunktionen von f. Nach (24.5) ist $f_1' = ... = f_n' = 0$. Darf also $m = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}$ annehmen.

Die Funktion $[0, 1] \to \Omega$ mit $t \mapsto u+t(v-u)$ ist differenzierbar. Nach Kettenregel (24.4.2): Die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $F : t \mapsto f(u+t(v-u))$ ist differenzierbar mit Ableitung 0. F ist konstant, erhalte $f(u) = F(0) = F(1) = f(v)$.

26 Kompaktheit

26.1 Definition

VORAUSSETZUNG: Sei M ein metrischer Raum.

DEFINITION: M heißt *kompakt* genau dann, wenn

- Jede Menge $\mathcal{O}$ offener Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{X \in \mathcal{O}} X$ hat eine endliche Teilmenge $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $M = X_1 \cup ... \cup X_n$.
- Jede Menge $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ hat eine endliche Teilmenge $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $Y_1 \cap ... \cap Y_n = \emptyset$.

Also: Eine Teilmenge $K \subseteq M$ ist kompakt genau dann, wenn jede Menge $\mathcal{O}$ offener Teilmenge von M mit $K \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{O}} X$ hat eine endliche Teilmente $\{X_1, ..., X_n\}$ mit $K \subseteq X_1 \cup ... \cup X_n$.

Triviale Anwendung: Sei M kompakt Für jede $\varepsilon > 0$ ist dann die Vereinigung von endlich vielen ε-Umgebungen. Insbesondere ist M beschränkt.

26.2 kompakt und vollständig

Folgendes ist äquivalent:

1. M ist kompakt
2. M ist folgenkompakt
3. M ist vollständig, und für jedes $\varepsilon > 0$ ist M die Vereinigung von endlich vielen ε-Umgebungen

BEWEIS: Siehe ausliegendes Script, schwer ist nur 3. $\Rightarrow$ 1.

26.3 weitere Sätze über stetige Funktionen

VORAUSSETZUNG: M kompakt, $f : M \to N$ stetig.

BEHAUPTUNG:

1. f ist sogar gleichmäßig stetig.
2. Für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq M$ ist auch $f(X)$ abgeschlossen.
3. Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : f(M) \to M$ stetig.
4. Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge abgeschlossen ist.

27 Mittelwertsatz, Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen

27.1 Mittelwertsatz

VORAUSSETZUNG: V, W Banachräume, $\Omega \subseteq V$ offen. $f : \Omega \to W$ differenzierbar, $u, v \in \Omega$ mit $[u, v] \subseteq \Omega$.

BEHAUPTUNG: (mit Operatornorm)

$$\exists\, x \in [u, v] \text{ mit } \|f(v) - f(u)\| \leq \|f'(x)\| \cdot |v - u|$$

BEWEIS: Nur für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ jeweils mit 2-Norm.

1. Der Fall $n = 1$, d.h. $V = \mathbb{R}$ mit $u = 0$ und $v = 1$. Sei „$\cdot$“ das Standardskalarprodukt auf $W = \mathbb{R}^m$. Also: $|w| = \sqrt{w \cdot w}$ (2-Norm). Setze

   $$w = f(1) - f(0) \text{ und } \varphi : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi : t \mapsto w \cdot f(t)$$

   Nach Produktregel (24) ist $\varphi'(t) = wf'(t)$. Der gewöhnliche Mittelwersatz aus Analysis 1 zeigt: Es existiert $t \in [0, 1]$ mit

   $$wf'(t) = \varphi'(t) = \varphi' t(t) \cdot (1 - 0) = \varphi(1) - \varphi(0) = w(f(1) - f(0)) = w \cdot w$$

   Dann folgt
   $$|w|^2 = |f'(t)w| \leq |f'(t)| \cdot |w|$$

   Darf $w \neq 0$ annehmen, d.h. $\|w\| \neq 0$, erhalte

   $$|f(v) - f(u)| = |w| \leq |f'(t)| = |f'(t)| \cdot |1 - 0|$$

2. Der allgemeine Fall $V = \mathbb{R}^n$. Wende Fall 1 an auf

$$g : [0,1] \to W = \mathbb{R}^m \text{ mit } g : t \mapsto f(u + t(v-u))$$

Erhalte $t \in [0,1]$ mit

$$|g(1) - g(0)| \leq |g'(t)| \cdot (1-0) = \underbrace{f(u+t(v-u)) \cdot (v-u)}_{\text{Matrixmultiplikation}}$$

Weiter: $g(1) - g(0) = f(v) - f(u)$ Also:

$$|f(v) - f(u)| \leq |f'(x) \cdot (v-u)| \leq |f'(x)| \cdot |v-u|$$

27.2 Konstante Funktion/Ableitung null

Die allgemeine Version des Mittelwertsatzes erlaubt eine entsprechende Verallgemeinerung von Satz (25.10) ($f' = 0 \Rightarrow f$ konstant, Beweis: $|f(v) - f(u)| \leq 0 \cdot ... = 0$, also $f(u) = f(v)$).

27.3 Der Schrankensatz

Definition: Eine Teilmenge M eines normierten Raumes V heißt *konvex*[36] genau dann, wenn für alle $u, v \in M$ auch $[u,v] \subseteq M$ gilt.

Voraussetzung: Sei $X_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar (kurz: $\mathcal{C}^1$-Funktion), sei $K \subseteq \Omega$ beschränkt, abgeschlossen, konvex.

Behauptung:

$$\|f(v) - f(u)\|_2 \leq \|v-u\|_2 \cdot \sup\{\|f'(x)\|_2 \mid x \in K\} \ \forall\, u, v \in K$$

Bemerkung: Das Supremum existiert wegen (21.3.4), $x \mapsto |f'(x)|$ ist stetig!

Beweis: Zu $u, v \in \mathbb{R}^n$ existieren $u_0, u_1, ..., u_p \in \mathbb{R}^n$ mit $u_0 = u$ und $u_p = v$ sowie $[u_{i-1}, u_i] \subseteq K$. Mit Mittelwertsatz ist für ein $x \in [u_{i-1}, u_i] \subseteq K$:

$$|f(u_i) - f(u_{i-1})| \leq |u_i - u_{i-1}| \cdot |f'(x)|$$

Es ist $f(v) - f(u) = \sum_{i=1}^{n} (f(u_i) - f(u_{i-1}))$. □

[36] „...in meinem jugendlichen Eifer...“

27.4 Ableitung der Umkehrfunktion

27.4.1 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in \Omega$.

BEHAUPTUNG: Es existieren $r, s, \delta > 0$ mit

$$r \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq s \;\forall\, x \in \Omega \text{ mit } |x - a| \leq \delta$$

BEWEIS: Wir haben $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{|x-a|} = 0$. Also: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{|x - a|} \right| \leq \varepsilon \;\forall\, x \in \Omega \setminus \{a\} \text{ mit } |x - a| \leq \delta$$

Erhalte für alle $x \in \Omega \setminus \{a\}$ mit $|x - a| \leq \delta$:

$$\left| \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| - \left| \frac{\alpha(x - a)}{|x - a|} \right| \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{|x - a|} \right| \leq \varepsilon$$

Also ist für alle entsprechenden x:

$$\underbrace{\left| \frac{\alpha(x - a)}{|x - a|} \right| - \varepsilon}_{:=r} \leq \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{\alpha(x - a)}{|x - a|} \right| + \varepsilon}_{:=s}$$

Zudem ist $\frac{\alpha(x-a)}{|x-a|} = \alpha(w)$ mit $|w| = 1$. Setze $S := \{\, w \in \mathbb{R}^n \mid |w| = 1\}$, S ist beschränkt und abgeschlossen, die Abbildung $S \to \mathbb{R}$ mit $w \mapsto |\alpha(w)|$ ist stetig. Mit (21.3.4):

$$M := \{\, |\alpha(w)| \mid w \in S\} \text{ mit } M_0 := \min M \text{ und } M_1 := \max M$$

Also ist $M_0 \neq 0$, da α bijektiv, also $M_0 > 0$. Wähle ε so, daß $M_0 - \varepsilon > 0$, dann folgt die Behauptung.

27.4.2 Ableitung der Umkehrfunktion

VORAUSSETZUNG: Sei f injektiv, $f(\Omega)$ offen, $f'(a) =: \alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar und $f_1 := f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ stetig in $a_1 = f(a)$.

BEHAUPTUNG: Dann ist f^{-1} differenzierbar in a_1 mit $f_1'(a_1) = f'(a)^{-1}$.
BEMERKUNG: α invertierbar bedeutet, daß α bijektiv ist, damit ist die Determinante der Jacobi-Matrix (die sog. *Funktionaldeterminante*) von f

ungleich 0.

Beweis: Es ist $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{|x-a|} = 0$. Da f_1 stetig in $a_1 = f(a)$, folgt:

$$\lim_{y\to a_1} \frac{y - a_1 - \alpha(f_1(y) - f_1(a_1))}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} = \lim_{y\to a_1} \frac{f(f_1(y)) - f(a) - \alpha(f_1(y) - a)}{|f_1(y) - a|} = 0$$

Die Umkehrfunktion α^{-1} ist stetig, also ist

$$\lim_{y\to a_1} \left((\pm 1) \cdot \beta \left(\frac{y - a_1 - \alpha(f_1(y) - f_1(a_1))}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} \right) \right) = \beta(0) = 0$$

Dann ist

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} = 0$$

Definiere

$$A := \frac{|f_1(y) - f_1(a_1)|}{|y - a_1|}$$

Dann ist auch

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|f_1(y) - f_1(a_1)|} \cdot A = 0$$

Denn: Mit $x = f_1(y)$ gilt $A = \frac{|x-a|}{f(x)-f(a)}$, und A ist nach Hilfssatz $s^{-1} \leq A \leq r^{-1}$ auf einer geeigneten Umgebung von a_1 beschränkt. Es folgt: Dann ist auch

$$\lim_{y\to a_1} \frac{f_1(y) - f_1(a_1) - \beta(y - a_1)}{|y - a_1|} = 0$$

Damit ist

$$f_1'(a_1) = \beta = \alpha^{-1} = f'(a)^{-1}$$

27.5 Der Banachsche Fixpunktsatz

Voraussetzung: Sei M ein vollständiger metrischer Raum, sei $0 < \lambda < 1$, $f : M \to M$ und gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \;\forall\, x, y \in M$$

Behauptung:

1. Es existiert genau ein $a \in M$ mit $f(a) = a$.
2. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen a.

Beweis: siehe Übungsaufgaben

27.6 Stetigkeit der inversen Abbildung

VORAUSSETZUNG: A Banachalgebra, A^* Einheitengruppe.

BEHAUPTUNG: A^* ist offen in A und folgende Abbildung ist stetig:

$$f : A^* \to A^* \text{ mit } f : u \mapsto u^{-1}$$

BEWEIS: siehe Übungsaufgaben

27.7 Ableitung der Umkehrfunktion

VORAUSSETZUNG: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ injektive $\mathcal{C}^1$-Funktion $f(U)$ offen, $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig, $f'(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar (d.h. die Determinante ist ungleich 0) für alle $u \in U$.

BEHAUPTUNG: f^{-1} ist ebenfalls $\mathcal{C}^1$-Funktion mit

$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1} \ \forall \, a \in U$$

27.8 Hauptsatz: Der Umkehrsatz

VORAUSSETZUNG: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $a \in \Omega$ und $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar.

BEHAUPTUNG: Es existiert eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von a mit den in (27.7) aufgeführten Eigenschaften (Bezeichnung $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$) BEWEIS: Arbeite mit der 2-Norm auf $\mathbb{R}^n$ (wegen Schrankensatz (27.3))

1. O.B.d.A ist $a = 0$ und $f(0) = 0$
2. O.B.d.A ist $f'(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} =: I$
3. Für $y \in \mathbb{R}^n$ definiere

   $$\varphi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_y : x \mapsto y + x - f(x)$$

   Es gilt:

   (a) $\varphi_y(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

   (b) $\varphi_y'(x) = I - f'(x)$

4. Es existiert $\varepsilon > 0$ mit

   $$K := \overline{U_\varepsilon(0)} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq \varepsilon\} \subseteq \Omega$$

   und

   $$|f'(0) - f'(x)| \leq \frac{1}{2} \ \forall \, x \in K$$

5. Es gilt für alle[37] $u, v \in K$:

$$|\varphi_y(v) - \varphi_y(u)| \leq |v - u| \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} \left|\varphi_y'(x)\right|}_{\leq \frac{1}{2}}$$

6. Es ist für alle $x \in K$:

$$|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)| \leq \frac{1}{2}|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

7. Für alle $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist

$$|\varphi_y(x)| \leq |\varphi_y(0)| + \frac{\varepsilon}{2} = |y| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

   Betrachte nun nur noch $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sezte $V = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$.

8. Erhalte mit dem Banachschen Fixpunktsatz (27.5) angewandt auf $\varphi_y : K \to K$ für jedes $y \in V$ genau einen Fixpunkt $x \in K$ und definiere $f_1 : y \mapsto x$.

9. Zu jedem $y \in V$ existiert genau ein $x \in U_\varepsilon(0)$ mit $y = f(x)$ (d.h. $\varphi_y(x) = x$ nach (3a).

10. Setze $U = f^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(0)$. Dann ist U offen in Ω, also in $\mathbb{R}^n$. $U = f_1(V)$, $f : U \to V$ ist injektiv, $f_1 : V \to U$ ist die inverse Funktion $f|_U^{-1}$.

11. $f_1 : V \to U$ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig mit $L = 2$).

12. $f'(u)$ ist invertierbar (d.h. bijektiv, d.h. im Endlichdimensionalen injektiv, d.h. Kern $f'(u) = \{0\}$)

Bemerkungen:

- Zu (1): Es existiert eine offene Umgebung Ω_0 von 0 mit $x + a \in \Omega$ für alle $x \in \Omega_0$. Ersetze f durch die Funktion

$$f_0 : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n \text{ mit } f_0 : x \mapsto f(x + a) - f(a)$$

- Zu (2): Ersetze f durch

$$\alpha^{-1} \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \alpha := f'(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

[37] „... das hatte ich Ihnen nicht vorgerechnet, um Ihnen nicht den Spaß daran zu nehmen!“

- Zu (4): Da Ω offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq \Omega$. Wähle $\varepsilon < \delta$, dann ist $K \subseteq U_\delta(0)$. Zudem ist f' stetig nach Voraussetzung.
- Zu (5): K ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Wende Schrankensatz (27.3) an, $\varphi_y : K \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion. Nach (3*b*) ist $\varphi_y(x) = I - f'(x) = f'(0) - f'(x)$, wende (4) an.
- Zu (8): $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist vollständig, denn $\mathbb{R}^n$ ist vollständig und K ist abgeschlossen. Nach (5) und (7) ist alles klar (sic!)
- Zu (10): U ist offen in Ω, da f stetig ist, und offen in $\mathbb{R}^n$, da Ω offen in $\mathbb{R}^n$ ist.
- Zu (11): Seien $y_1, y_2 \in V$. $x_1 = f_1(y_1)$, $x_2 = f_1(y_2)$. Dann ist
  $$x_2 - x_1 = \varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1) + f(x_2) - f(x_1)$$
  Aus (5) folgt:
  $$|x_2 - x_1| \leq |\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)| + |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
  Dann gilt: $|f_1(y_2) - f_1(y_1)| \leq 2|y_2 - y_1|$, also ist die Funktion Lipschitz-stetig mit $L = 2$.
- Zu (12): Sei $u \in U$. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt mit $\alpha = f'(u)$:
  $$|(I - f'(u))v| \leq |I - \alpha|\,|v| \leq \frac{1}{2}|v|$$
  Annahme: $\alpha v = 0$. Dann ist
  $$|v| = |Iv| = |IV - \alpha v| = |(I - \alpha)v| \leq \frac{1}{2}|v|$$
  Gilt nur für $v = 0$.

27.8.1 Korollar zum Umkehrsatz

Voraussetzung: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv, $f'(a)$ invertierbar in allen $a \in \Omega$.

Behauptung: $\Omega_1 := f(\Omega)$ und offen (in $\mathbb{R}^n$) und $f^{-1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion mit
$$f'(f(a)) = f'(a)$$
Beweis: Für alle $a \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U(a) \subseteq \Omega$ mit $f(U(a))$ offen und $f^{-1}|_{U(a)}$ $\mathcal{C}^1$-Funktion. Also:
$$\underset{\text{offen}}{f(\Omega)} = \bigcup_{a \in \Omega} f(U(a))$$
Der Rest ist klar, siehe auch (27.7).

27.9 Umkehrsatz auf $\mathbb{C}$

Der Umkehrsatz (mit Korollar) gilt genauso für $\mathbb{C}^n$. Bei normierten Räumen über $\mathbb{C}$ ist die Ableitung einer Funktion an einer Stelle per definitionem eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.

Spezialfall: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ injektiv, $f'(a) \neq 0 \; \forall\, a \in \Omega$.

Behauptung: $f^{-1} : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Anwendung: $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto e^z$, Ω ein offener Streifen (in $\mathbb{C}$) der Höhe 2π, d.h. $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit

$$\Omega = \{\, x + iy \mid x \in \mathbb{R}, a < y < a + 2\pi \}$$

Setze $A = \{\, x + ia \mid x \in \mathbb{R}\}$. Wir wissen: Die e-Funktion ist injektiv auf $\Omega \cup A$, mit Bild $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also: $f(\Omega) = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus f(A)$. Was ist $f(A)$?

$$\begin{aligned} \left\{ e^{x+ia} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ e^x \cdot e^{ia} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ e^x \mid x \in \mathbb{R}\}\, e^{ia} \\ &= \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{ia} \end{aligned}$$

Erhalte die Umkehrfunktion $L : \mathbb{C}_a \to \Omega$ mit $e^z \mapsto z \in \Omega$ ist differenzierbar mit

$$L'(e^z) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{e^z}$$

Hauptfall: $e^{ia} = -1$, d.h. $a = -\pi$. Dann $\mathbb{C}_a = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (Hauptzweig der Logarithmusfunktion)

27.10 Satz über implizite Funktionen

Voraussetzung: $\Omega_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ „=“ $\mathbb{R}^{p+q}$; $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$; $(a, b) \in \Omega$ Nullstelle von F Die folgende lineare Abbildung ist invertierbar (insbesondere ist $m = q$):

$$\mathbb{R}^q \to W \text{ mit } y \mapsto (F'(a, b))(0, y) \qquad (*)$$

Behauptung: Es existieren Umgebungen $U(a) \subseteq \mathbb{R}^p$ und $U(b) \subseteq \mathbb{R}^q$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion

$g : U(a) \to U(b)$ mit $g : \{\,(x, y) \in U(a) \times U(b) \mid F(x, y) = 0\} = \{\,(x, g(x)) \mid x \in U(a)\}$

Spezialfall: $p = q = m = 1$. Wir haben $F'(a, b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} D_1F(a, b) & D_2F(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1F(a, b)x + D_2F(a, b)y$$

Die Abbildung in $(*)$ ist also

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } y \mapsto D_2F(a,b)y$$

D.h., daß $D_2F(a,b) \neq 0$.

BEISPIEL: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto x^2(1-x^2) - y^2$. Bestimmung von $g(x)$:

$$F(x,g(x)) = 0 \; \forall \, x \in A \qquad x^2(1-x^2) - g(x)^2 = 0$$

$$2x(1-x^2) + x^2(-2x) - 2g(x) \cdot g'(x) \qquad g'(x) = \frac{2x(1-x^2) - 2x^3}{2g(x)}$$

Bestimmung von $g'(x)$ im Spezialfall $(p = q = m = 1)$: $S(x) := F(x,g(x)) = 0 \; \forall \, x \in A$,

$$\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$
$$x \overset{G}{\mapsto} (x, g(x)) \mapsto$$

$$\begin{aligned}
0 &= S'(x) = F'(x,g(x)) \circ G'(x) \\
&= \begin{pmatrix} D_1F(x,g(x)) & D_2F(x,g(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} \cdot \\
&= D_1F(x,g(x)) + g'(x) D_2F(x,g(x)) \\
g'(x) &= \frac{-D_1F(x,g(x))}{D_2F(x,g(x))}
\end{aligned}$$

Ende![38]

[38] „Wenn Sie das alles gut beherrschen, was wir hier gemacht haben, wissen Sie fast mehr als ich vor ein paar Monaten...“

Index